Lernen mit Mathe-Scout

Wer kennt das nicht? Man kommt bei den Mathehausaufgaben nicht weiter und es ist einem völlig schleierhaft, wie die Lösung zustande kommt. Am nächsten Tag erfährt man in der Schule das Ergebnis der Aufgabe. Viel hilft das aber nicht. Denn ein echter Lerneffekt tritt nur ein, wenn man den Lösungsweg nachvollziehen kann.

Diesen Lerneffekt möchte Mathe-Scout dir verschaffen. Wir haben die Aufgaben aus dem Lambacher Schweizer gerechnet und die Lösungswege ausführlich aufgeschrieben. So kannst du Schritt für Schritt in deinem eigenen Tempo den Rechenweg nachvollziehen.

Besondere Symbole

Hinweise und Tipps lenken deine Aufmerksamkeit auf die wichtigen Aspekte einer Aufgabe und verhindern, dass du in Rechenfallen tapst.

STOP Hier besonders aufpassen

i Tipps und Hinweise erleichtern dir das Verständnis

Navigation

Um schnell und unkompliziert zur gewünschten Aufgaben-Lösung zu gelangen, ist die Navigationsleiste links zu empfehlen. Die Navigation besitzt folgenden Aufbau:
Seite - Aufgabe - Teilaufgabe

Grafiken

Mathe-Scout legt großen Wert auf Grafiken. Wir haben zahlreiche Funktionsgraphen für dich skizziert - auch dann, wenn es laut Aufgabenstellung nicht erforderlich war. Die Graphen erleichtern dir das Verständnis und führen dir die besonderen Eigenschaften einer Funktion wie Nullstellen oder Verhalten gegen Unendlich anschaulich vor Augen. Mit dem neuen Bildungsplan ist das umso wichtiger. Denn der grafikfähige Taschenrechner gehört nicht mehr zur Standardausstattung eines Schülers. Einfach mal eine Funktion zeichnen, ist nicht mehr möglich.

So lernst du richtig

Mathe-Scout soll dir immer dann weiterhelfen, wenn du auch nach langem Grübeln nicht weiterkommst. Am Anfang musst du vielleicht noch den ganzen Rechenweg durchlesen. Doch je besser du die Aufgaben von Mal zu Mal verstehst, desto weniger Input brauchst du. Das sorgt nicht nur für bessere Noten in Klassenarbeiten, sondern wird dich auch für die nächsten Aufgaben motivieren.
Aber Vorsicht: Einfach nur Abschreiben lohnt sich nicht. Unsere Lösungswege sind so ausführlich, dass reines Abschreiben keinen Spaß macht. Auf Dauer würdest du dir damit nur mehr Arbeit machen als notwendig. Nutz Mathe-Scout, um Routine zu bekommen und in deinem eigenen Tempo zu lernen. Mathe-Scout möchte dein Denken nicht ersetzen - sondern dir auf die Sprünge helfen. Du wirst sehen: Es lohnt sich. Je routinierter du wirst, desto leichter fallen dir die Mathehausaufgaben.

Fehler entdeckt? Anregungen?

Niemand ist perfekt! Trotz aller Sorgfalt kann nicht ausgeschlossen werden, dass sich Fehler eingeschlichen haben. Sollte dir etwas auffallen, kannst du uns über das Briefsymbol oben links jederzeit darauf hinweisen. Gerne kannst du uns auch für Anregungen kontaktieren. Wir sind offen für Vorschläge und freuen uns auf dein Feedback. Übrigens: Solange deine Lizenz läuft, kannst du dein Mathe-Scout-Produkt jederzeit updaten. So hast du immer die aktuellste Version und gemeldete Fehler sind korrigiert.

Bereit für ein erfolgreiches Schuljahr in Mathe?

Mathe-Scout UG (haftungsbeschränkt)
Web: www.Mathe-Scout.de
E-Mail: info@Mathe-Scout.de

Kapitel 4: Extremstellen und Wendestellen

Im Kapitel *Extremstellen und Wendestellen* lernst du, eine Funktion zu untersuchen. Du wirst Hoch-, Tief- und Wendepunkte bestimmen und ihr Monotonieverhalten ermitteln. Um dir die Sachverhalte besser darzustellen, setzt Mathe-Scout wie gewohnt auf Graphen, auch dann, wenn sie laut Aufgabe nicht gefordert waren. Die Schaubilder erleichtern dir das Verständnis und helfen dir bei den Hausaufgaben.
Der Markenname Lambacher Schweizer ist rechtlich geschützt und wird ausschließlich im Zusammenhang mit den Lösungswegen verwendet.

Seite	109	**Aufgabe**	4	**Exercise-ID**	Ex.109.4.000

a) Es sollen die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte bestimmt werden.

- Erste Ableitung bilden:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \\
f'(x) &= 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x \\
f'(x) &= \frac{3}{3}x^2 + \frac{6}{2}x \\
f'(x) &= x^2 + 3x
\end{aligned}
$$

- Erste Ableitung gleich Null setzen und nach x auflösen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
x^2 + 3x &= 0 \\
x(x+3) &= 0 \qquad |\text{Satz vom Nullprodukt. Ein Faktor muss Null sein.} \\
x_1 &= 0 \\
x + 3 &= 0 \qquad |-3 \\
x_2 &= -3
\end{aligned}
$$

- Zweite Ableitung bilden:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= x^2 + 3x \\
f''(x) &= 2x + 3
\end{aligned}
$$

- $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$ in zweite Ableitung einsetzen:

$$
\begin{aligned}
f''(0) &= 2 \cdot 0 + 3 \\
f''(0) &= 0 + 3 \\
f''(0) &= 3 > 0
\end{aligned}
$$

$$f''(-3) = 2 \cdot (-3) + 3$$
$$f''(-3) = -6 + 3$$
$$f''(-3) = -3 < 0$$

Die Funktion hat somit an der Stelle $x_1 = 0$ einen Tiefpunkt und an der Stelle $x_2 = -3$ einen Hochpunkt.

- $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$ in $f(x)$ einsetzen, um die dazugehörenden y-Wert zu berechnen:

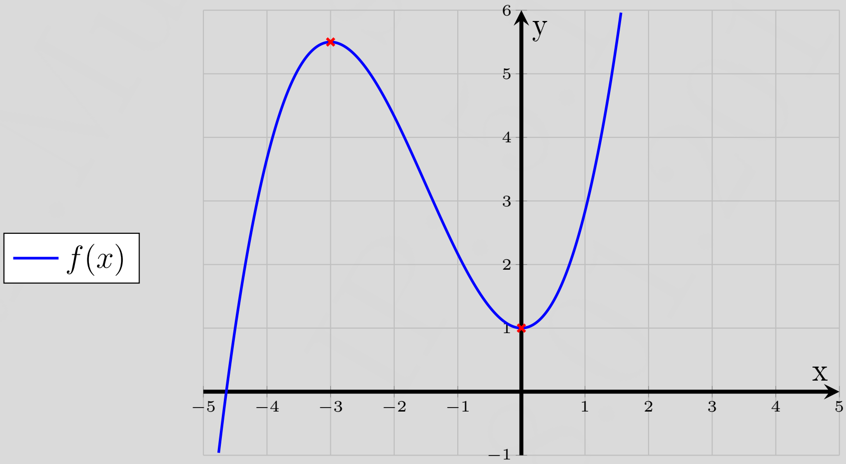
$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot (0)^3 + \frac{3}{2} \cdot (0)^2 + 1$$
$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0 + 1$$
$$f(0) = 0 + 0 + 1$$
$$f(0) = 1$$

Die Funktion hat somit den Tiefpunkt $T(0|1)$.

$$f(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-3)^2 + 1$$
$$f(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-27) + \frac{3}{2} \cdot 9 + 1$$
$$f(-3) = -\frac{27}{3} + \frac{27}{2} + 1$$
$$f(-3) = -9 + 13.5 + 1$$
$$f(-3) = 5.5$$

Die Funktion hat somit den Hochpunkt $H(-3|5.5)$.

- Zur Veranschaulichung:



Der Graph mit dem Hochpunkt $H(-3|5.5)$ und dem Tiefpunkt $T(0|1)$.

b) Es sollen die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte bestimmt werden.

- Erste Ableitung bilden:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$$
$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{4}x^3 - 2 \cdot 2x$$
$$f'(x) = \frac{4}{4}x^3 - 4x$$
$$f'(x) = x^3 - 4x$$

- Erste Ableitung gleich Null setzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
x^3 - 4x &= 0 \qquad |x \text{ ausklammern} \\
x(x^2 - 4) &= 0 \qquad |\text{Satz vom Nullprodukt. Ein Faktor muss Null sein.} \\
x_1 &= 0 \\
x^2 - 4 &= 0 \qquad |\text{3. binomische Formel: } a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b) \\
(x-2)(x+2) &= 0 \\
x - 2 &= 0 \qquad | + 2 \\
x_2 &= 2 \\
x + 2 &= 0 \qquad | - 2 \\
x_3 &= -2
\end{aligned}$$

- Zweite Ableitung bilden:

$$f'(x) = x^3 - 4x$$
$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

- $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$ in zweite Ableitung einsetzen:

$$f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4$$
$$f''(0) = 0 - 4$$
$$f''(0) = -4 < 0$$

$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4$$
$$f''(2) = 3 \cdot 4 - 4$$
$$f''(2) = 12 - 4$$
$$f''(2) = 8 > 0$$

$$f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4$$
$$f''(-2) = 3 \cdot 4 - 4$$
$$f''(-2) = 12 - 4$$
$$f''(-2) = 8 > 0$$

Die Funktion hat somit an der Stelle $x_1 = 0$ einen Hochpunkt und an den Stelle $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$ einen Tiefpunkt.

- $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$in $f(x)$ einsetzen, um die dazugehörenden y-Wert zu berechnen:

$$f(0) = \frac{1}{4} \cdot (0)^4 - 2 \cdot (0)^2$$
$$f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0 - 2 \cdot 0$$
$$f(0) = 0 - 0$$
$$f(0) = 0$$

Die Funktion hat somit den Hochpunkt $H(0|0)$.

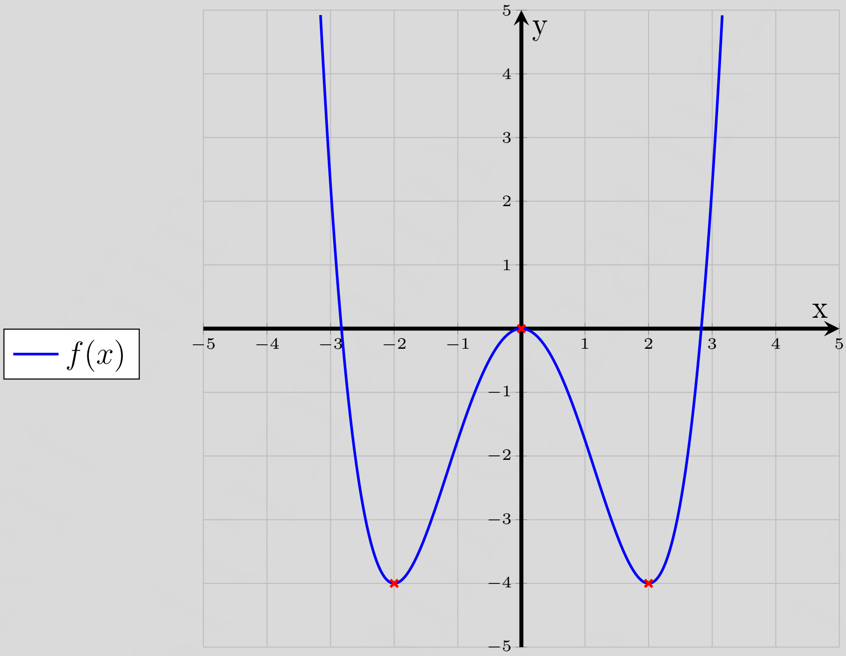
$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2$$
$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 4$$
$$f(2) = \frac{16}{4} - 8$$
$$f(2) = 4 - 8$$
$$f(2) = -4$$

Die Funktion hat somit den Tiefpunkt $T_1(2|-4)$.

$$f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2$$
$$f(-2) = \frac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 4$$
$$f(-2) = \frac{16}{4} - 8$$
$$f(-2) = 4 - 8$$
$$f(-2) = -4$$

Die Funktion hat somit den Tiefpunkt $T_2(-2|-4)$.

- Zur Veranschaulichung:



Der Graph mit dem Hochpunkt $H(0|0)$ und den Tiefpunkten $T_1(2|-4)$ und $T_2(-2|-4)$.

c) Es sollen die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte bestimmt werden.

- Erste Ableitung bilden:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^4 - 2x^2 + 2 \\ f'(x) &= 4 \cdot (-x^3) - 2 \cdot 2x \\ f'(x) &= -4x^3 - 4x \end{aligned}$$

- Erste Ableitung gleich Null setzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -4x^3 - 4x &= 0 && |x \text{ ausklammern} \\ x(-4x^2 - 4) &= 0 && |\text{Satz vom Nullprodukt. Ein Faktor muss Null sein.} \\ x_1 &= 0 \\ -4x^2 - 4 &= 0 && | + 4 \\ -4x^2 &= 4 && | \div (-4) \\ x^2 &= -4 \end{aligned}$$

  Da aus negativen Zahlen keine Wurzel gezogen werden darf, gibt es keine weiteren Nullstellen.

- Zweite Ableitung bilden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x^3 - 4x \\ f''(x) &= 3 \cdot (-4x^2) - 4 \\ f''(x) &= -12x^2 - 4 \end{aligned}$$

- $x_1 = 0$ in zweite Ableitung einsetzen:

$$\begin{aligned} f''(0) &= -12 \cdot 0^2 - 4 \\ f''(0) &= 12 \cdot 0 - 4 \\ f''(0) &= 0 - 4 \\ f''(0) &= -4 < 0 \end{aligned}$$

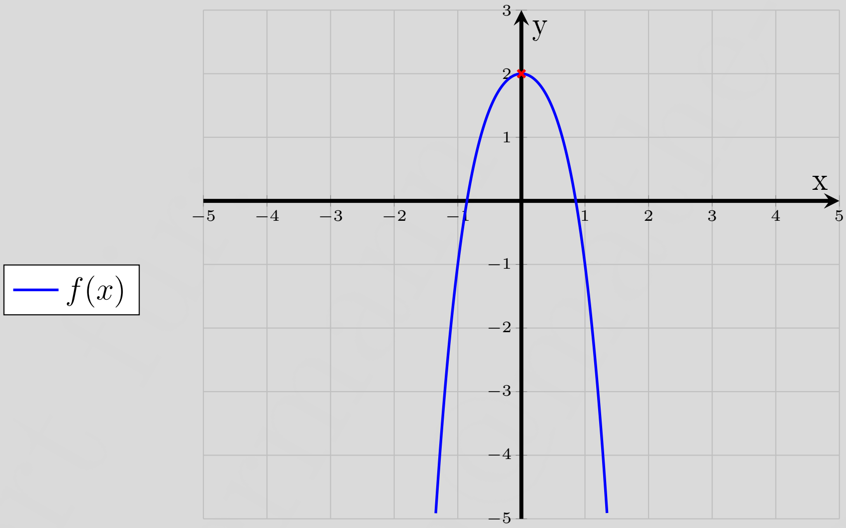
  Die Funktion hat somit an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt

- $x_1 = 0$ in $f(x)$ einsetzen, um den dazugehörenden y-Wert zu berechnen:

$$\begin{aligned} f(0) &= -(0)^4 - 2 \cdot (0)^2 + 2 \\ f(0) &= 0 - 2 \cdot 0 + 2 \\ f(0) &= 0 + 2 \\ f(0) &= 2 \end{aligned}$$

  Die Funktion hat somit den Hochpunkt $H(0|2)$.

- Zur Veranschaulichung:



Der Graph mit dem Hochpunkt $H(0|2)$.

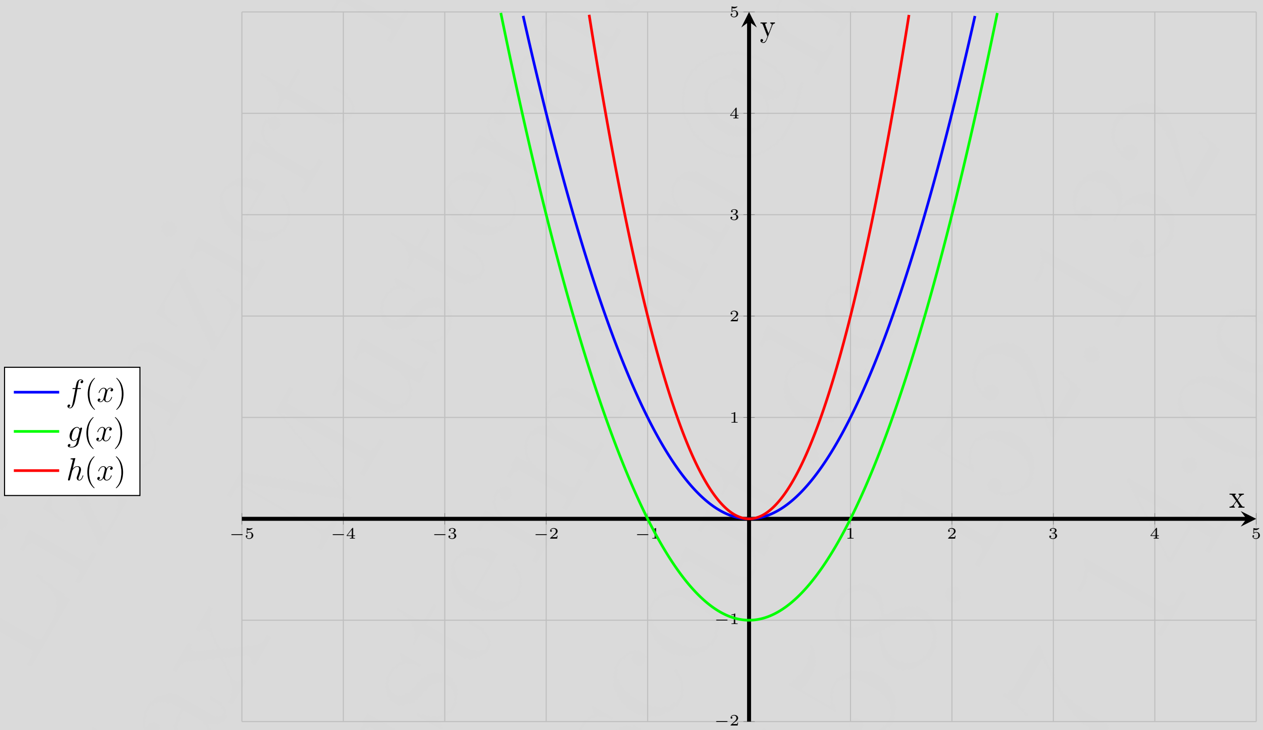
Seite	110	**Aufgabe**	11	**Exercise-ID**	Ex.110.11.000

a) Es soll eine ganzrationale Funktion vom Grad zwei angegeben werden, die genau ein lokales Minimum besitzt.

Einfachstes Beispiel ist die die Funktion $f(x) = x^2$. Andere Beispiele sind:

- $g(x) = x^2 - 1$
- $h(x) = 2x^2$

Zur Veranschaulichung:

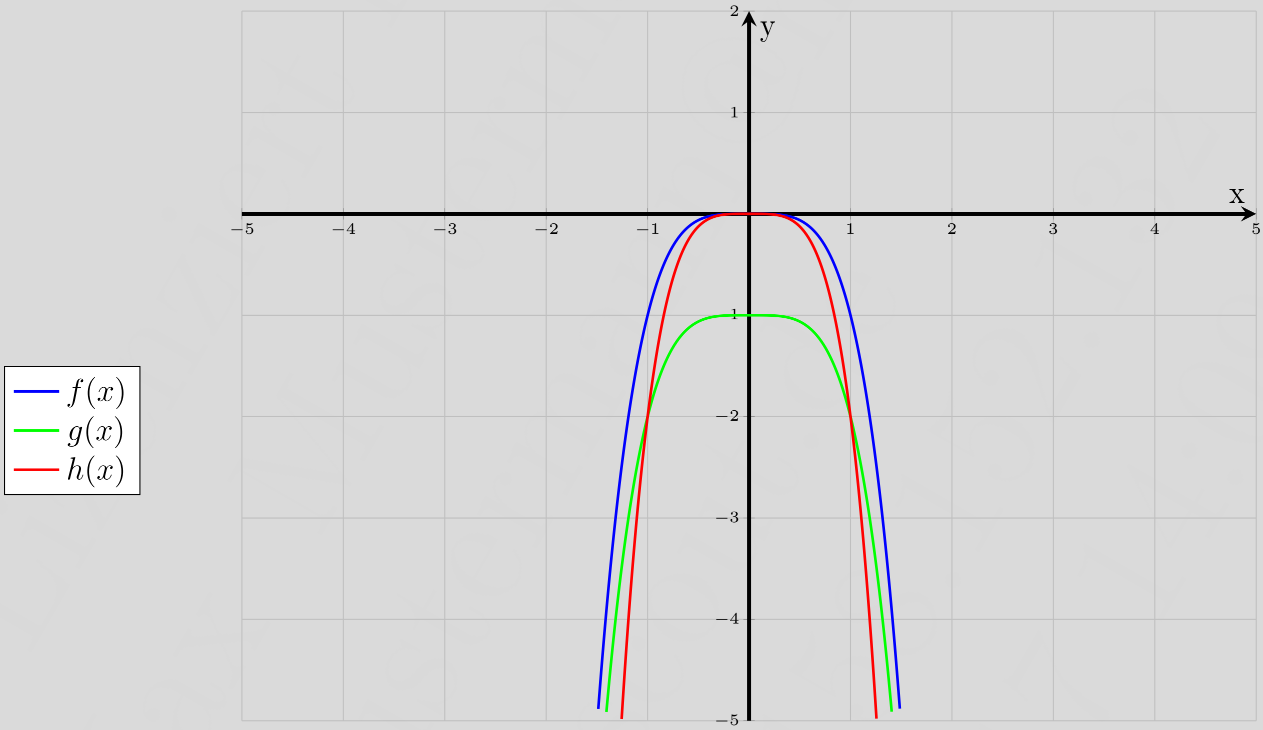


b) Es soll eine ganzrationale Funktion vom Grad vier angegeben werden, die genau ein lokales Maximum besitzt.

Der einfachste Weg ist, eine Funktion aus der Aufgabe a) zu verwenden, diese zu quadrieren und durch ein negatives Vorzeichen an der x-Achse zu spiegeln. Mögliche Lösungen wären demnach:

- $f(x) = -(x^2)^2 = -x^4$
- $g(x) = -x^4 - 1$
- $h(x) = -2x^4$

Zur Veranschaulichung:

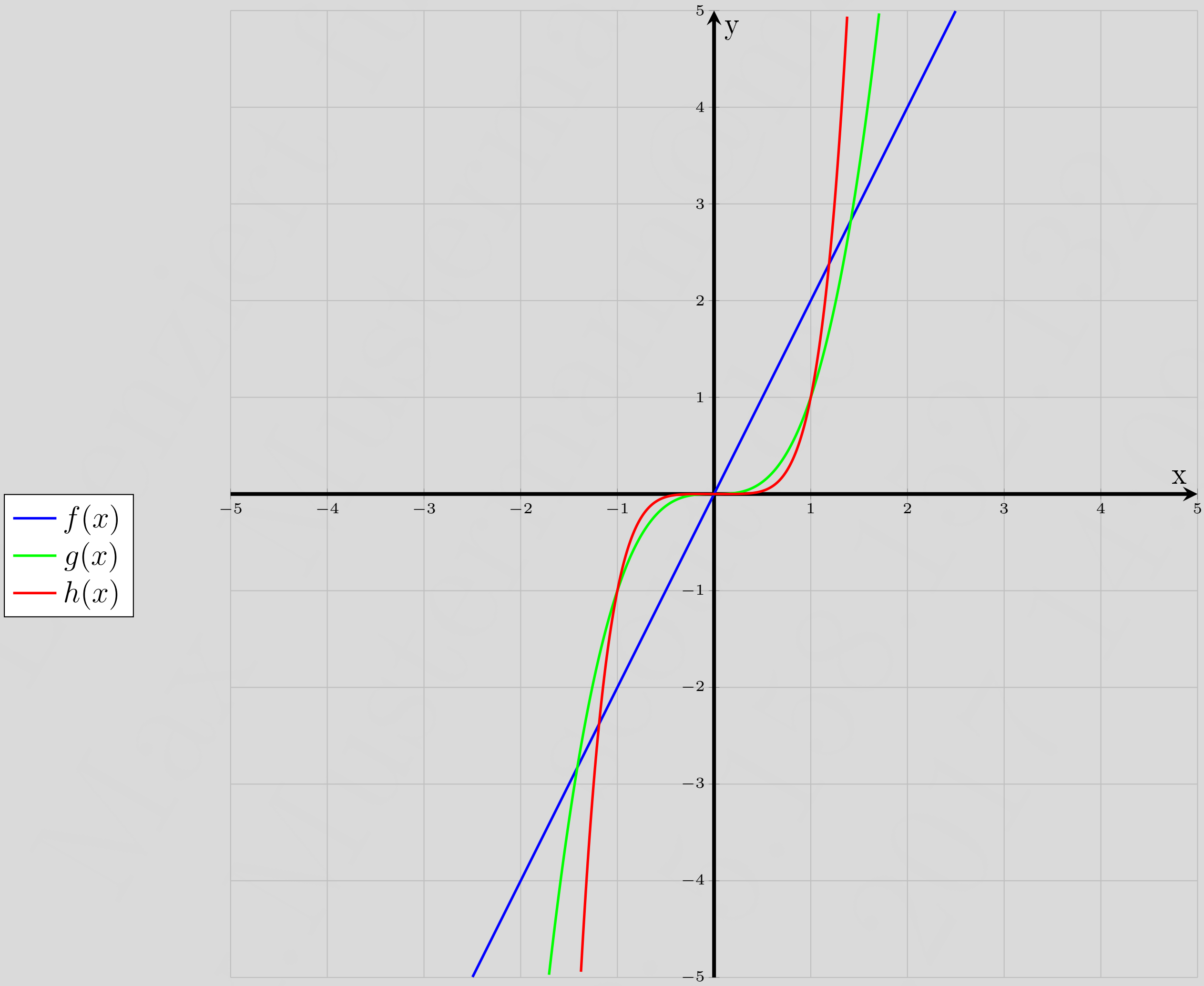


c) Es soll eine Funktion angegeben werden, die gar keine Extremstellen besitzt.

Dazu kann man entweder ein Gerade wählen oder eine Funktion mit Sattelpunkt. Beispiele sind:

- $f(x) = 2x$
- $g(x) = x^3$
- $h(x) = x^5$

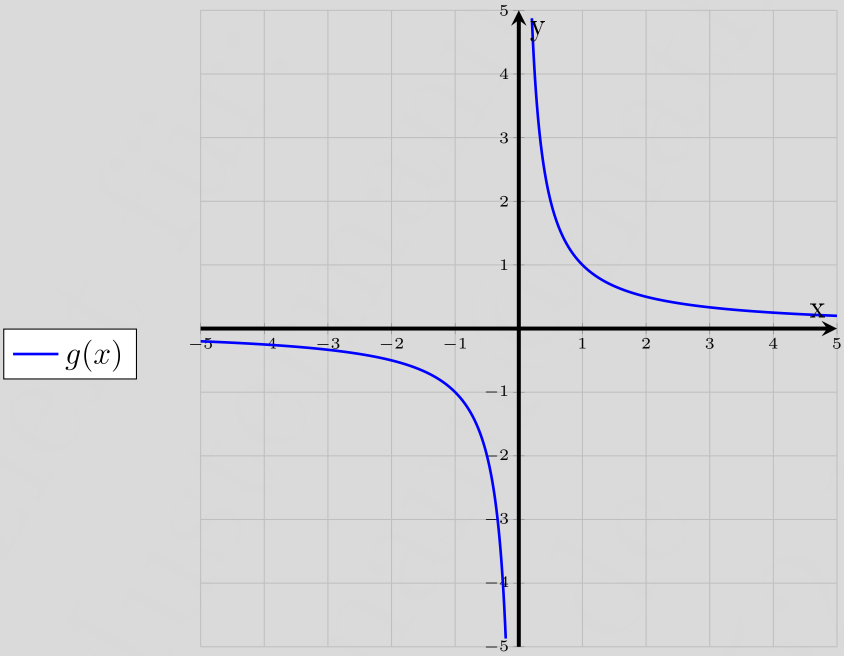
Zur Veranschaulichung:



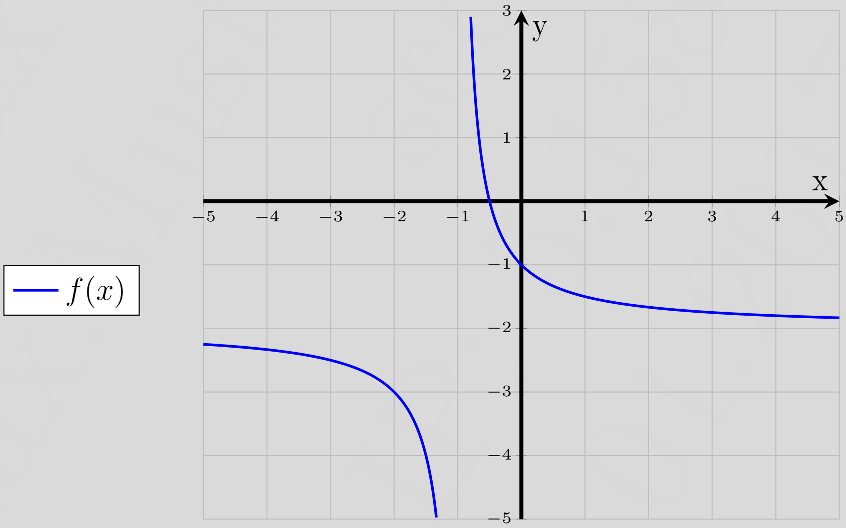
Seite	116	Aufgabe	2	Exercise-ID	Ex.116.2.000

a) Es soll der Graph von $g(x)$ und anschließend der von $f(x)$ skizziert werden.

Der Graph von $g(x) = \frac{1}{x}$ ist aus vorhergehenden Aufgaben bekannt. Er sieht wie folgt aus:

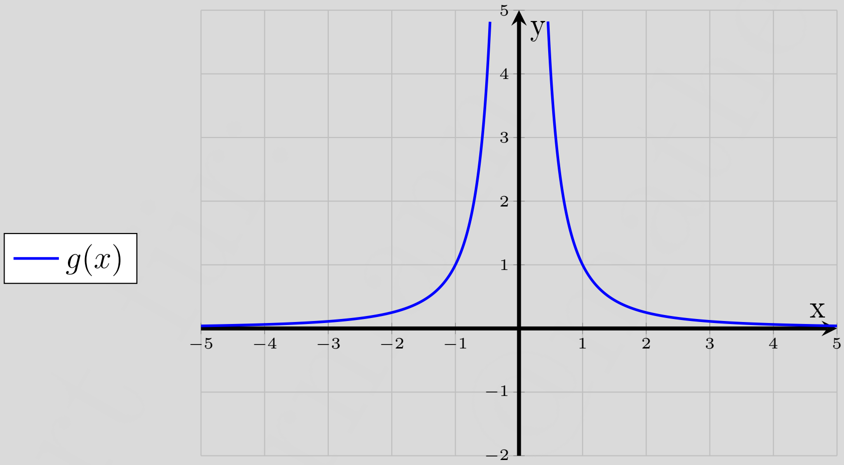


Der Graph von $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2$ entspricht dem von $g(x)$, ist allerdings um -2 entlang der y-Achse und um -1 entlang der x-Achse verschoben. Er sieht damit wie folgt aus:

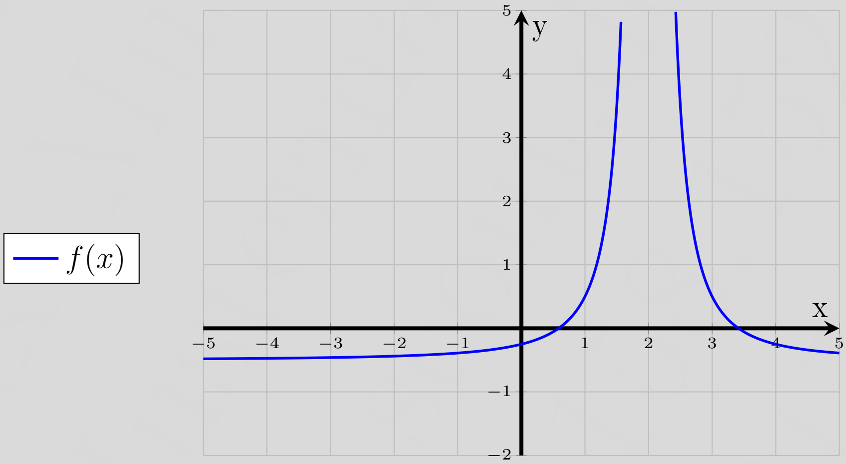


b) Es soll der Graph von $g(x)$ und anschließend der von $f(x)$ skizziert werden.

Der Graph von $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ist aus vorhergehenden Aufgaben bekannt. Er sieht wie folgt aus:

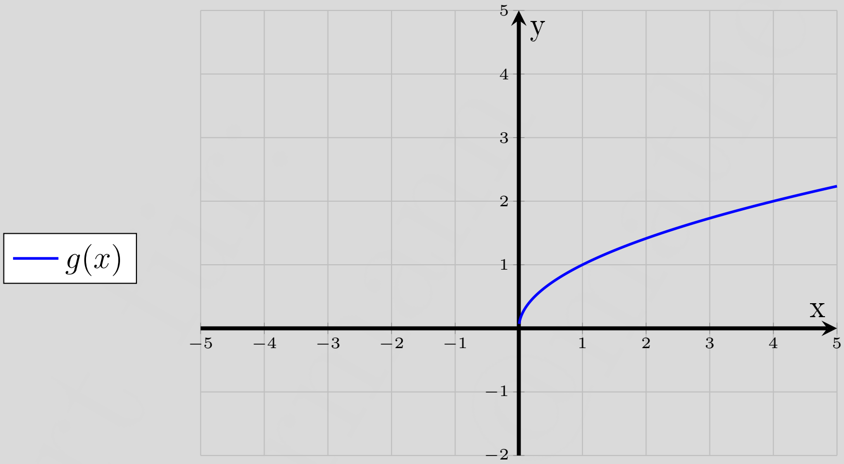


Der Graph von $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{2}$ entspricht dem von $g(x)$, ist allerdings um $-\frac{1}{2}$ entlang der y-Achse und um 2 entlang der x-Achse verschoben. Er sieht damit wie folgt aus:

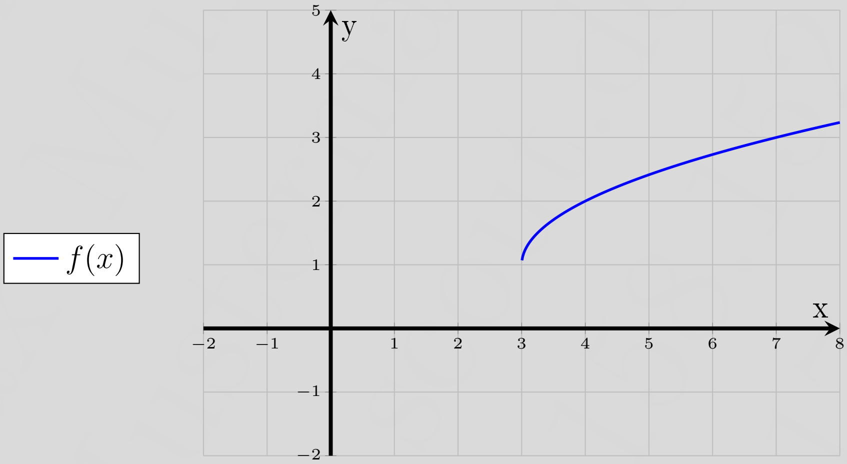


c) Es soll der Graph von $g(x)$ und anschließend der von $f(x)$ skizziert werden.

Der Graph von $g(x) = \sqrt{x}$ ist aus vorhergehenden Aufgaben bekannt. Er sieht wie folgt aus:



Der Graph von $f(x) = \sqrt{x-3} + 1$ entspricht dem von $g(x)$, ist allerdings um 1 entlang der y-Achse und um 3 entlang der x-Achse verschoben. Er sieht damit wie folgt aus:



Die Graphen immer wiederkehrender Funktionen wie $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = \frac{1}{x}$ und $i(x) = \sqrt{x}$ sollte man immer grob im Kopf haben. Steht man dennoch auf dem Schlauch, kann man sich mit einer Wertetabelle helfen.

Wer möchte, kann seine Graphen anschließend mit dem kostenlosen Funktionsplotter unter www.mathe-scout.de überprüfen.

Seite	118	**Aufgabe**	11	**Exercise-ID**	Ex.118.11.000

Es soll mit drei Argumenten gezeigt werden, dass die dargestellten Graphen nicht zur Funktion f gehören.

- Graph A:
  - Der Graph müsste den Punkt $P(0|0)$ besitzen. Dem ist aber nicht so.
  - Da die Funktion eine Funktion vierten Grades ist, kann sie maximal vier Nullstellen besitzen. Der dargestellte Graph hat jedoch sechs Nullstellen.
  - Da die Funktion nur gerade Hochzahlen hat, müsste der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse sein. Das ist er jedoch nicht.
- Graph B:
  - Das Verhalten gegen unendlich ist falsch. Bei der dargestellten Funktion müsste sich der Graph links und rechts der y-Achse gegen positiv Unendlich bewegen. Das tut er aber nicht.
  - Da die Funktion nur gerade Hochzahlen hat, müsste der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse sein. Das ist er jedoch nicht.
  - Setzt man die Funktion gleich null, so sieht man, dass $f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4)$ an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$ Nullstellen hat. Der dargestellte Graph hat aber lediglich zwei Nullstellen.