Kapitel 2: Schlüsselkonzept: Ableitung - Differentialrechnung

Im Kapitel *Schlüsselkonzept: Ableitung - Differentialrechnung* lernst du, die Steigung einer Funktion zu bestimmen. Erst wirst du sie über den Differentenquotienten ermitteln, später lernst du die Ableitungsregeln, mit denen du Funktionen noch einfacher ableiten kannst. Um dir die Aufgaben zu veranschaulichen, hat Mathe-Scout an vielen Stellen Schaubilder gezeichnet, auch dann, wenn sie laut Aufgabenstellung nicht gefordert waren.
Übrigens: Mit dem kostenlosen Funktionsplotter auf www.mathe-scout.de kannst Du online jederzeit einen Graphen erstellen.
Der Markenname Lambacher Schweizer ist rechtlich geschützt und wird ausschließlich im Zusammenhang mit den Lösungswegen verwendet.

Seite	42	**Aufgabe**	2	**Exercise-ID**	Ex.42.2.000

a) Es sollen die Ableitungen $f'(2)$, $f'(-1)$ und $f(-2)$ mithilfe der eingezeichneten Tangenten bestimmt werden.

- Ableitung $f'(2)$
  Zur Ermittlung der Ableitung $f'(2)$ wird das Steigungsdreieck zwischen den Punkten $P(1.5|1.5)$ und $Q(2.5|2.5)$, durch die die Tangente verläuft, folgendermaßen berechnet:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_Q - Y_P}{X_Q - X_P} = \frac{2.5 - 1.5}{2.5 - 1.5}$$
$$m = \frac{1}{1}$$
$$m = 1$$

  Somit besitzt die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = 2$ den Wert $f'(2) = 1$.

- Ableitung $f'(-1)$
  Zur Ermittlung der Ableitung $f'(-1)$ wird das Steigungsdreieck zwischen den Punkten $P(-2|-1)$ und $Q(-1|-3)$, durch die die Tangente verläuft, folgendermaßen berechnet:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_Q - Y_P}{X_Q - X_P} = \frac{-3-(-1)}{-1-(-2)}$$
$$m = \frac{-3+1}{-1+2}$$
$$m = \frac{-2}{1}$$
$$m = -2$$

  Somit besitzt die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = -1$ den Wert $f'(-1) = -2$.

- Ableitung $f'(-2)$
  Zur Ermittlung der Ableitung $f'(-2)$ wird das Steigungsdreieck zwischen den Punkten $P(-2|2)$ und $Q(-1.5|-3)$, durch die die Tangente verläuft, folgendermaßen berechnet:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_Q - Y_P}{X_Q - X_P} = \frac{-3-2}{-1.5-(-2)}$$
$$m = \frac{-5}{-1.5+2}$$
$$m = \frac{-5}{0.5}$$
$$m = -10$$

Somit besitzt die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = -2$ den Wert $f'(-2) = -10$.

b) Es sollen bestimmt werden, ob die Ableitungen $f'(0)$, $f'(0.5)$, $f(2.25)$ und $f(-1.75)$ positiv, negativ oder Null ist.

- Ableitung $f'(0)$
  Legt man eine Tangente an der Stelle $x = 0$ des Graphen von $f(x)$ an, so erkennt man, dass die Steigung der Tangente positiv ist. Die Ableitung $f'(0)$ ist somit positiv.

- Ableitung $f'(0.5)$
  Legt man eine Tangente an der Stelle $x = 0.5$ des Graphen von $f(x)$ an, so erkennt man, dass die Steigung der Tangente positiv ist. Die Ableitung $f'(0.5)$ ist somit positiv.

- Ableitung $f'(2.25)$
  Legt man eine Tangente an der Stelle $x = 2.25$ des Graphen von $f(x)$ an, so erkennt man, dass die Steigung der Tangente Null ist. Es handelt sich dabei um eine waagrechte Gerade, die parallel zur x-Achse ist. Die Ableitung $f'(2.25)$ ist somit Null.

Eine Ableitung kann ausschließlich an Hochpunkten (Punkt, an dem der Graph einen *Berggipfel* darstellt) und Tiefpunkten (Punkt, an dem der Graph ein *Bergtal* darstellt) den Wert Null besitzen. Nur an diesen Punkten kann eine waagrechte Tangente existieren.

c) Es soll näherungsweise $f'(0.5)$ bestimmt werden.

Zur näherungsweisen Bestimmung von $f'(0.5)$ wird das Geodreieck an den Punkt $A(-0.5|-1.5)$ angelegt, sodass das Geodreieck den Graphen in diesem Punkt gerade berührt (tangiert).
Zusätzlich muss die angelegte Seite des Geodreiecks parallel zum Verlauf des Graphen am Punkt A sein. Legt man das Geodreieck korrekt an, so erkennt man, dass die angelegt Seite des Geodreiecks (näherungsweise) durch die Punkte $P(0|-3)$ und $Q(1|0)$ verläuft.
Zur Ermittlung der Ableitung $f'(0.5)$ wird das Steigungsdreieck zwischen den Punkten Punkten P und Q, durch die die Tangente verläuft, folgendermaßen berechnet:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_Q - Y_P}{X_Q - X_P} = \frac{0-(-3)}{1-0}$$
$$m = \frac{0+3}{1}$$
$$m = \frac{3}{1}$$
$$m = 3$$

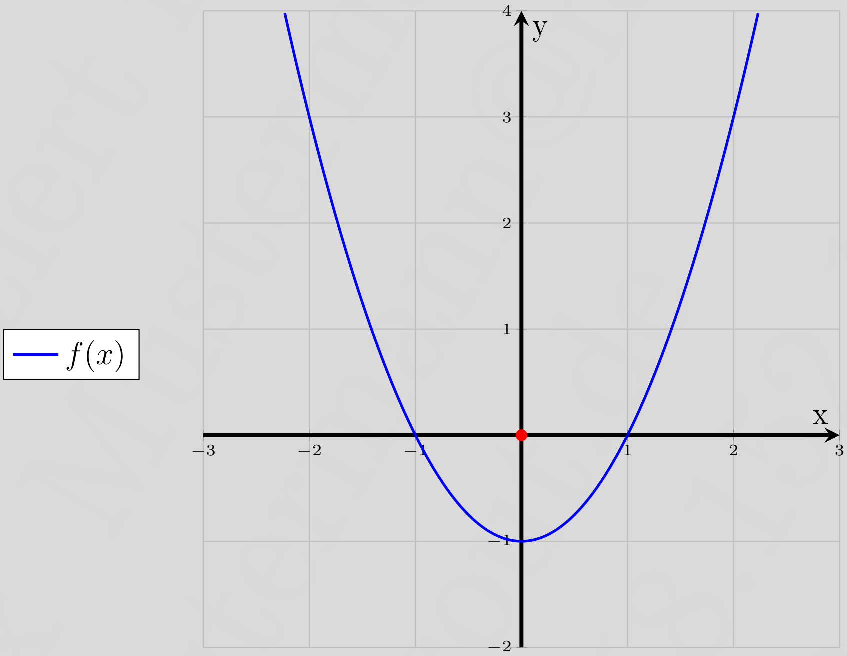
Somit besitzt die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = 0.5$ näherungsweise den Wert $f'(0.5) = 3$.

Seite	47	Aufgabe	7	Exercise-ID	Ex.47.7.000

a) Es soll der dargestellte Graph von f gezeichnet und die Schnittpunkte des Graphen der Ableitungsfunktion f' mit der x-Achse markiert werden. Anschließend gilt es, den Graphen von f' zu skizzieren.

Eine Ableitungsfunktion schneidet die x-Achse an den Stellen, an denen ihre Ausgangsfunktion (Stammfunktion) die Steigung Null hat. Im dargestellten Graphen ist das an der Stelle $x = 0$ der Fall. Man erkennt, dass die Funktion in diesem Punkt weder steigt noch fällt. Man sagt auch, dass sie an dieser Stelle eine waagrechte Tangente hat. Es ist also der Punkt $P(0|0)$ zu markieren.

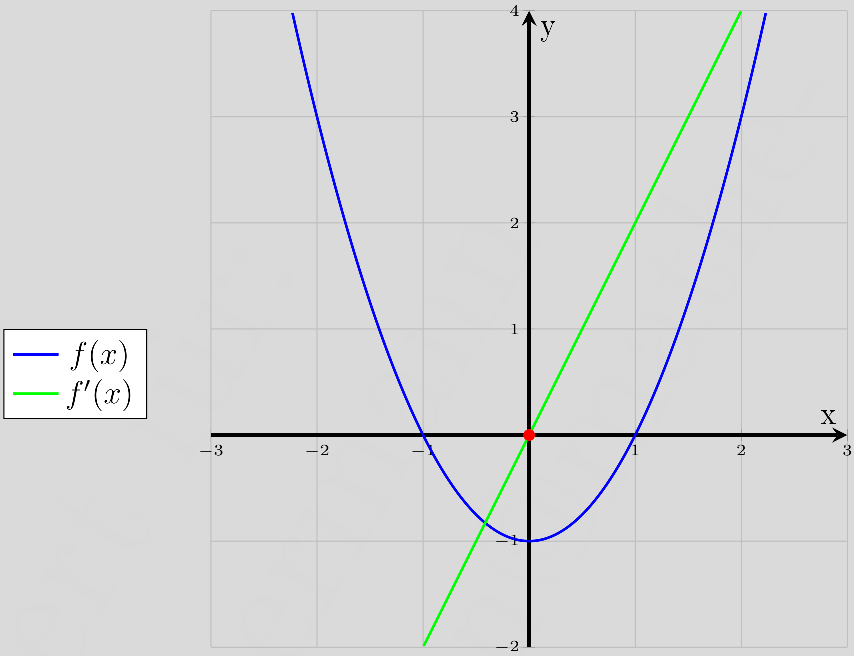
Zeichnen des Graphen von f und Markierung der Nullstelle von f':



Nun gilt es, in das gleiche Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion f' zu skizzieren. Da die Ableitung die Steigung ihrer Ausgangsfunktion (Stammfunktion) entspricht, betrachtet man dazu die Steigung von f. Über sie lässt sich folgendes sagen:

- Im Bereich $x < 0$ fällt der Graph. Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion f' in diesem Bereich negative y-Werte hat, sprich ihr Graph verläuft unterhalb der x-Achse.
- An der Stelle $x = 0$ ist die Steigung wie bereits bekannt gleich Null. Die Ableitungsfunktion f' hat hier also eine Nullstelle, sprich einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
- Im Bereich $x > 0$ steigt der Graph. Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion f' in diesem Bereich positive y-Werte hat, sprich ihr Graph verläuft oberhalb der x-Achse.

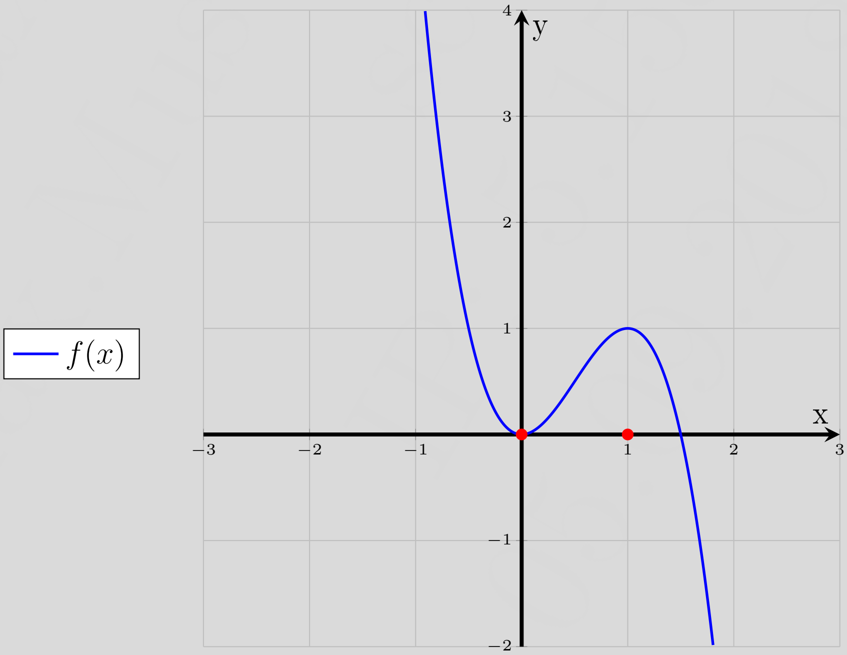
Damit lässt sich nun die Ableitungsfunktion f' skizzieren:



b) Es soll der dargestellte Graph von f gezeichnet und die Schnittpunkte des Graphen der Ableitungsfunktion f' mit der x-Achse markiert werden. Anschließend gilt es, den Graphen von f' zu skizzieren.

Eine Ableitungsfunktion schneidet die x-Achse an den Stellen, an denen ihre Ausgangsfunktion (Stammfunktion) die Steigung Null hat. Im dargestellten Graphen ist das an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ der Fall. Man erkennt, dass die Funktion in diesen Punkten weder steigt noch fällt. Man sagt auch, dass sie an diesen Stellen eine waagrechte Tangente hat. Es sind also die Punkt $P(0|0)$ und $Q(1|0)$ zu markieren.

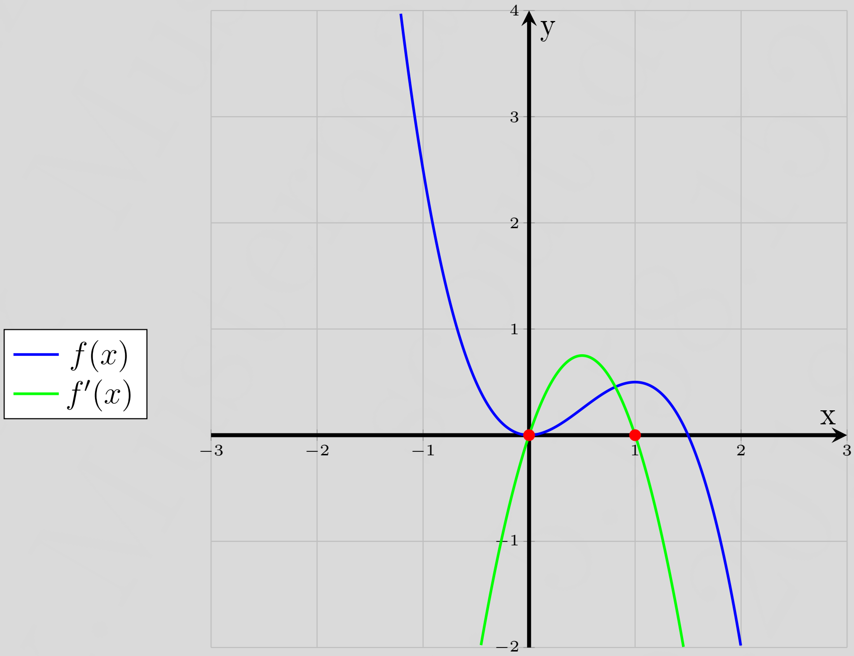
Zeichnen des Graphen von f und Markierung der Nullstellen von f':



Nun gilt es, in das gleiche Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion f' zu skizzieren. Da die Ableitung die Steigung ihrer Ausgangsfunktion (Stammfunktion) entspricht, betrachtet man dazu die Steigung von f. Über sie lässt sich folgendes sagen:

- Im Bereich $x < 0$ fällt der Graph. Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion f' in diesem Bereich negative y-Werte hat, sprich ihr Graph verläuft unterhalb der x-Achse.
- An der Stelle $x = 0$ ist die Steigung wie bereits bekannt gleich Null. Die Ableitungsfunktion f' hat hier also eine Nullstelle, sprich einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
- Im Bereich $0 < x < 1$ steigt der Graph. Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion f' in diesem Bereich positive y-Werte hat, sprich ihr Graph verläuft oberhalb der x-Achse.
- An der Stelle $x = 1$ ist die Steigung wie bereits bekannt gleich Null. Die Ableitungsfunktion f' hat also auch hier eine Nullstelle, sprich einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
- Im Bereich $x > 1$ fällt der Graph. Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion f' in diesem Bereich negative y-Werte hat, sprich ihr Graph verläuft unterhalb der x-Achse.

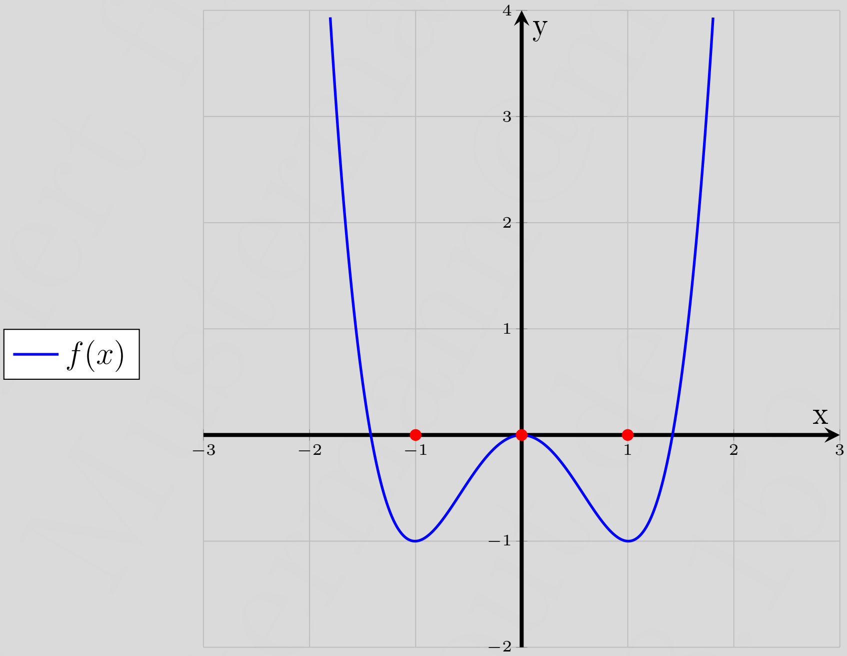
Damit lässt sich nun die Ableitungsfunktion f' skizzieren:



c) Es soll der dargestellte Graph von f gezeichnet und die Schnittpunkte des Graphen der Ableitungsfunktion f' mit der x-Achse markiert werden. Anschließend gilt es, den Graphen von f' zu skizzieren.

Eine Ableitungsfunktion schneidet die x-Achse an den Stellen, an denen ihre Ausgangsfunktion (Stammfunktion) die Steigung Null hat. Im dargestellten Graphen ist das an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ der Fall. Man erkennt, dass die Funktion in diesen Punkten weder steigt noch fällt. Man sagt auch, dass sie an diesen Stellen eine waagrechte Tangente hat. Es sind also die Punkte $P(-1|0)$, $Q(0|0)$ und $R(1|0)$zu markieren.

Zeichnen des Graphen von f und Markierung der Nullstellen von f':

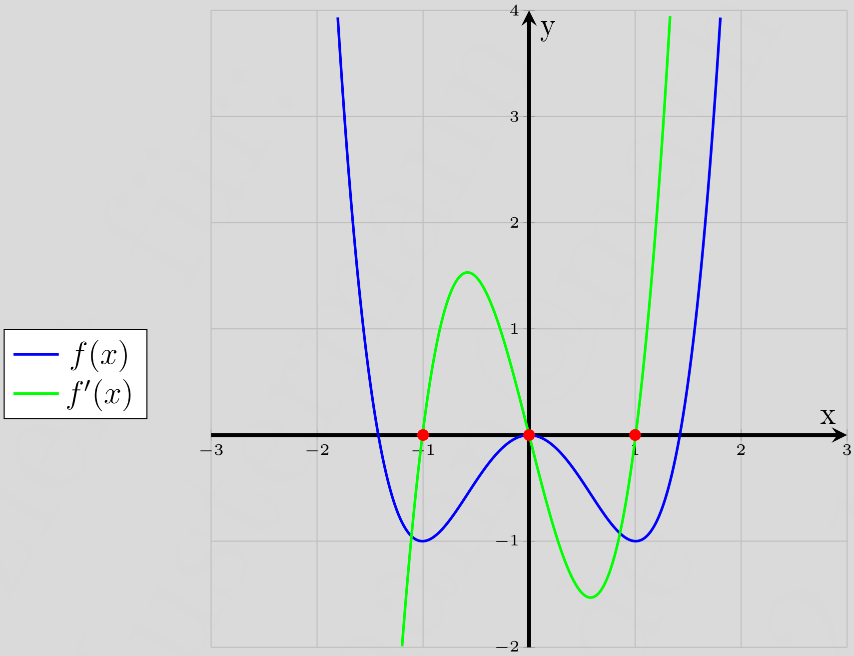


Nun gilt es, in das gleiche Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion f' zu skizzieren. Da die Ableitung die Steigung ihrer Ausgangsfunktion (Stammfunktion) entspricht, betrachtet man dazu die Steigung von f. Über sie lässt sich folgendes sagen:

- Im Bereich $x < -1$ fällt der Graph. Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion f' in diesem Bereich negative y-Werte hat, sprich ihr Graph verläuft unterhalb der x-Achse.
- An der Stelle $x = -1$ ist die Steigung wie bereits bekannt gleich Null. Die Ableitungsfunktion f' hat hier also eine Nullstelle, sprich einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
- Im Bereich $-1 < x < 0$ steigt der Graph. Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion f' in diesem Bereich positive y-Werte hat, sprich ihr Graph verläuft oberhalb der x-Achse.
- An der Stelle $x = 0$ ist die Steigung wie bereits bekannt gleich Null. Die Ableitungsfunktion f' hat hier also eine Nullstelle, sprich einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
- Im Bereich $0 < x < 1$ fällt der Graph. Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion f' in diesem Bereich negative y-Werte hat, sprich ihr Graph verläuft unterhalb der x-Achse.
- An der Stelle $x = 1$ ist die Steigung wie bereits bekannt gleich Null. Die Ableitungsfunktion f' hat hier also wieder eine Nullstelle, sprich einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

- Im Bereich $x > 1$ steigt der Graph. Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion f' in diesem Bereich positive y-Werte hat, sprich ihr Graph verläuft oberhalb der x-Achse.

Damit lässt sich nun die Ableitungsfunktion f' skizzieren:



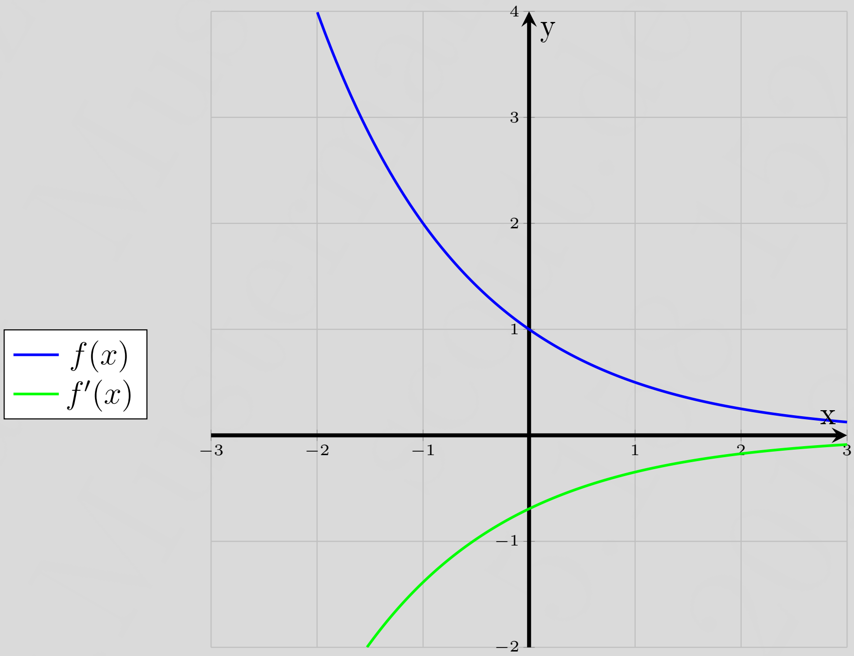
d) Es soll der dargestellte Graph von f gezeichnet und die Schnittpunkte des Graphen der Ableitungsfunktion f' mit der x-Achse markiert werden. Anschließend gilt es, den Graphen von f' zu skizzieren.

Eine Ableitungsfunktion schneidet die x-Achse an den Stellen, an denen ihre Ausgangsfunktion (Stammfunktion) die Steigung Null hat. Im dargestellten Graphen ist das in dem gewählten Ausschnitt nie der Fall. Es sind also keine Schnittpunkte mit der x-Achse zu markieren.

Nun gilt es, den Graphen der Ableitungsfunktion f' zu skizzieren. Da die Ableitung die Steigung ihrer Ausgangsfunktion (Stammfunktion) entspricht, betrachtet man dazu die Steigung von f. Über sie lässt sich folgendes sagen:

- Der Graph fällt im gesamten dargestellten Bereich. Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion f' in diesem Bereich negative y-Werte hat, sprich ihr Graph verläuft unterhalb der x-Achse.
- Zu erkennen ist weiter, dass der Graph für $x \to +\infty$ immer weniger stark fällt. Das bedeutet, dass die negativen y-Werte der Ableitungsfunktion betragsmäßig kleiner werden, sprich sich dem Wert Null nähern.

Damit lässt sich nun die Ableitungsfunktion f' skizzieren:



Seite	47	Aufgabe	9	Exercise-ID	Ex.47.9.000

a) Es soll die Funktion $f(x) = \frac{2}{x}$ abgeleitet werden.

Um die Funktion abzuleiten, wird zunächst der Differenzenquotient im Intervall $I = [a, x]$ gebildet. Anschließend verkürzt man gedanklich den Intervallbereich, indem man x gegen a streben lässt. In einem letzten Schritt wird a dann durch x ersetzt.

- Differenzenquotienten bilden:

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{a}}{x - a} && |2 \text{ ausklammern} \\
&= \frac{2 \cdot (\frac{1}{x} - \frac{1}{a})}{x - a} && |\text{Bruchterm trennen} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{a}) \cdot \frac{1}{x - a} && |\text{Nenner ausmultiplizieren} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{x(x - a)} - \frac{1}{a(x - a)} && |\text{Brüche auf den gemeinsamen Nenner } xa(x-a) \text{ bringen} \\
&= 2 \cdot \frac{a}{ax(x - a)} - \frac{x}{xa(x - a)} && |\text{Brüche zusammenfassen} \\
&= 2 \cdot \frac{a - x}{ax(x - a)} && |\text{Zähler und Nenner jeweils mit } -1 \text{ multiplizieren} \\
&= 2 \cdot \frac{(-1)(a - x))}{(-1)ax(x - a)} \\
&= 2 \cdot \frac{-a + x}{-ax(x - a)} \\
&= 2 \cdot \frac{x - a}{-ax(x - a)} \\
&= 2 \cdot \frac{\cancel{x - a}}{-ax \cdot \cancel{(x - a)}} && |x - a \text{ kürzen} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{-ax} \\
&= \frac{2}{-ax}
\end{aligned}
$$

- $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{2}{-ax} = \frac{2}{-a \cdot a} = \frac{2}{-a^2} = -\frac{2}{a^2}$

- Ersetzt man nun a durch x, so erhält man die Ableitungsfunktion $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

b) Es soll die Funktion $f(x) = \frac{3}{x}$ abgeleitet werden.

Um die Funktion abzuleiten, wird zunächst der Differenzenquotient im Intervall $I = [a, x]$ gebildet. Anschließend verkürzt man gedanklich den Intervallbereich, indem man x gegen a streben lässt. In einem letzten Schritt wird a dann durch x ersetzt.

- Differenzenquotienten bilden:

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
=&\frac{\frac{3}{x} - \frac{3}{a}}{x - a} && |3 \text{ ausklammern} \\
=&\frac{3 \cdot (\frac{1}{x} - \frac{1}{a})}{x - a} && |\text{Bruchterm trennen} \\
=&3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x - a} && |\text{Nenner ausmultiplizieren} \\
=&3 \cdot \frac{1}{x(x - a)} - \frac{1}{a(x - a)} && |\text{Brüche auf den gemeinsamen Nenner } xa(x-a) \text{ bringen} \\
=&3 \cdot \frac{a}{ax(x - a)} - \frac{x}{xa(x - a)} && |\text{Brüche zusammenfassen} \\
=&3 \cdot \frac{a - x}{ax(x - a)} && |\text{Zähler und Nenner jeweils mit } -1 \text{ multiplizieren} \\
=&3 \cdot \frac{(-1)(a - x))}{(-1)ax(x - a)} \\
=&3 \cdot \frac{-a + x}{-ax(x - a)} \\
=&3 \cdot \frac{x - a}{-ax(x - a)} \\
=&3 \cdot \frac{\cancel{x - a}}{-ax \cdot \cancel{(x - a)}} && |x - a \text{ kürzen} \\
=&3 \cdot \frac{1}{-ax} \\
=&\frac{3}{-ax}
\end{aligned}
$$

- $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{3}{-ax} = \frac{3}{-a \cdot a} = \frac{3}{-a^2} = -\frac{3}{a^2}$

- Ersetzt man nun a durch x, so erhält man die Ableitungsfunktion $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$

c) Es soll die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ abgeleitet werden.

Um die Funktion abzuleiten, wird zunächst der Differenzenquotient im Intervall $I = [a, x]$ gebildet. Anschließend verkürzt man gedanklich den Intervallbereich, indem man x gegen a streben lässt. In einem letzten Schritt wird a dann durch x ersetzt.

- Differenzenquotienten bilden:

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
=&\frac{x^2+1-(a^2+1)}{x-a} \\
=&\frac{x^2+1-a^2-1}{x-a} \\
=&\frac{x^2-a^2}{x-a} && |\text{3. binomische Formel: } a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b) \\
=&\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\
=&\frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} && |x-a \text{ kürzen} \\
=&x+a
\end{aligned}
$$

- $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} x + a = a + a = 2a$

- Ersetzt man nun a durch x, so erhält man die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x$

d) Es soll die Funktion $f(x) = 2x^2 - 1$ abgeleitet werden.

Um die Funktion abzuleiten, wird zunächst der Differenzenquotient im Intervall $I = [a, x]$ gebildet. Anschließend verkürzt man gedanklich den Intervallbereich, indem man x gegen a streben lässt. In einem letzten Schritt wird a dann durch x ersetzt.

- Differenzenquotienten bilden:

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
=&\frac{2x^2-1-(2a^2-1)}{x-a}\\
=&\frac{2x^2-1-2a^2+1}{x-a}\\
=&\frac{2x^2-2a^2}{x-a} && |\text{Im Nenner 2 ausklammern}\\
=&\frac{2(x^2-a^2)}{x-a} && |\text{3. binomische Formel: } a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)\\
=&\frac{2(x-a)(x+a)}{x-a}\\
=&\frac{2\cdot\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} && |x-a \text{ kürzen}\\
=&2(x+a)
\end{aligned}
$$

- $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}2(x+a)=2(a+a)=2(2a)=4a$
- Ersetzt man nun a durch x, so erhält man die Ableitungsfunktion $f'(x)=4x$

Seite	59	**Aufgabe**	5	**Exercise-ID**	Ex.59.5.000

a) Es soll graphisch die Gleichung der Tangenten in den markierten Punkten A, B und C bestimmt werden.

Eine Tangente ist eine Gerade. Dieser liegt die Gleichung $t : y = mx + c$ zugrunde. Sobald man einen Punkt $P(x|f(x))$ dieser Geraden sowie ihre Steigung kennt, lässt sich damit die Gleichung bestimmen. Ein Punkt der Tangente lässt sich am Schaubild ablesen, die dazugehörende Steigung wird durch das Steigungsdreieck ermittelt.

- Bestimmen der Gleichung der Tangente im Punkt $A(2|-1.5)$:
  - Steigung bestimmen durch Steigungsdreieck mit dem Punkt $A(2|-1.5)$ und einem weiteren, frei wählbaren Punkt der Tangente, z.B. $R(1|-2.5)$:

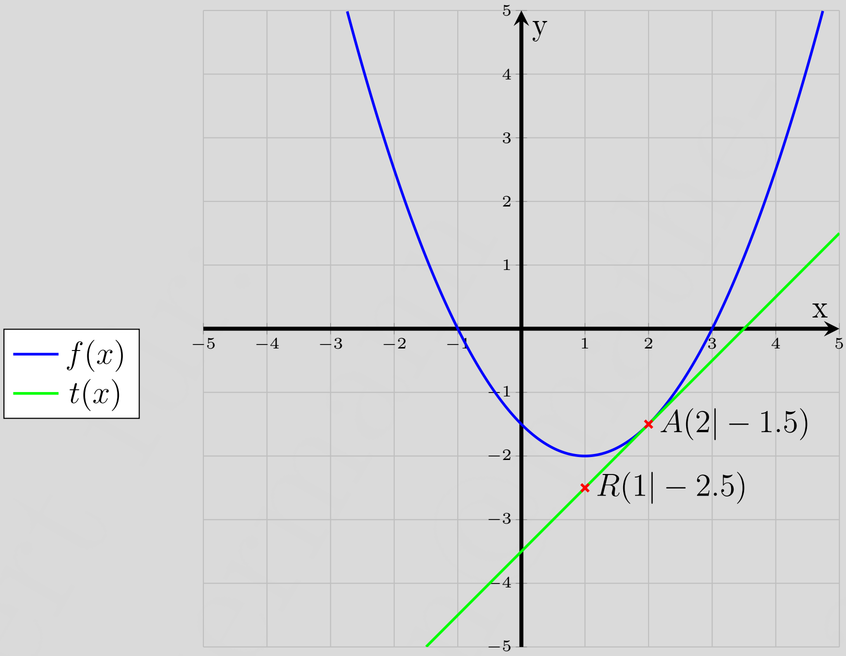
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_A - Y_R}{X_A - X_R} = \frac{-1.5 - (-2.5)}{2 - 1}$$
$$m = \frac{-1.5 + 2.5}{1}$$
$$m = \frac{1}{1}$$
$$m = 1$$

  - Tangentengleichung bestimmen mit dem Punkt $A(2|-1.5)$ und der Steigung $m = 1$:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \quad &&|m = 1 \quad x = 2 \quad y = -1.5 \\ -1.5 &= 1 \cdot 2 + c \\ -1.5 &= 2 + c &&|-2 \\ -1.5 - 2 &= c \\ -3.5 &= c \\ c &= -3.5 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangenten durch den Punkt $A(2|-1.5)$ lautet damit $t : y = 1x-3.5 = x-3.5$.

Zur Veranschaulichung wird der Graph der Funktion $f(x)$ sowie der Tangente $t(x)$ gezeichnet:



- Bestimmen der Gleichung der Tangente im Punkt $B(-1|0)$:
  - Steigung bestimmen durch Steigungsdreieck mit dem Punkt $B(-1|0)$ und einem weiteren, frei wählbaren Punkt der Tangente, z.B. $Q(0|-2)$:

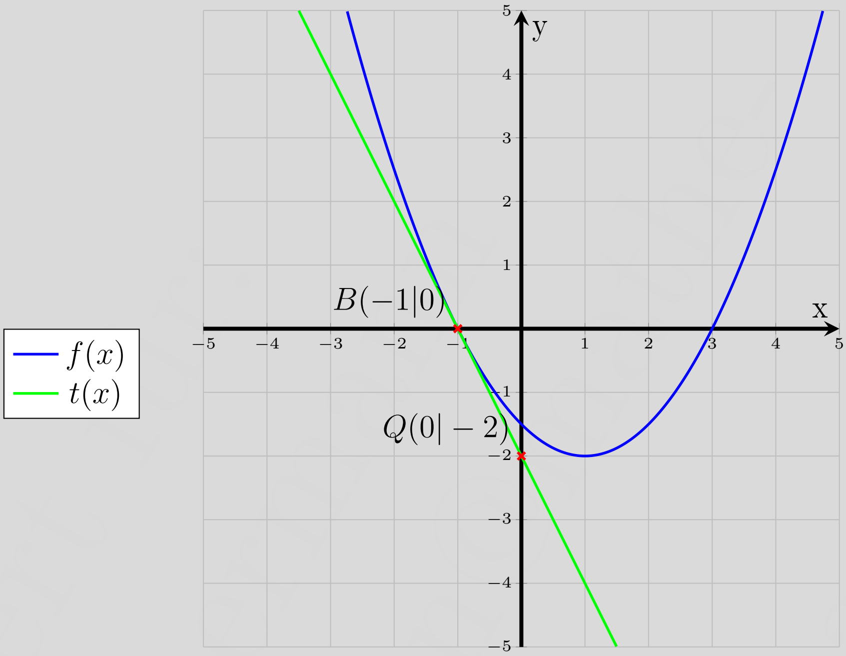
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_Q - Y_B}{X_Q - X_B} = \frac{-2-0}{0-(-1)}$$
$$m = \frac{-2}{0+1}$$
$$m = \frac{-2}{1}$$
$$m = -2$$

  - Tangentengleichung bestimmen mit dem Punkt $B(-1|0)$ und der Steigung $m = -2$:

$$\begin{aligned} y &= mx + c && |m = -2 \quad x = -1 \quad y = 0 \\ 0 &= -2 \cdot (-1) + c \\ 0 &= 2 + c && |-2 \\ -2 &= c \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangenten durch den Punkt $B(-1|0)$ lautet damit $t : y = -2x - 2$.

Zur Veranschaulichung wird der Graph der Funktion $f(x)$ sowie der Tangente $t(x)$ gezeichnet:



- Bestimmen der Gleichung der Tangente im Punkt $C(1|-2)$:
  - Steigung bestimmen:
    Da es sich bei der Tangente um eine waagrechte Gerade handelt, muss die Steigung nicht separat berechnet werden. Waagrechte Geraden haben immer die Steigung $m = 0$
  - Tangentengleichung bestimmen mit dem Punkt $C(1|-2)$ und der Steigung $m = 0$:

$$\begin{aligned} y &= mx + c && |m = 0 \quad x = 1 \quad y = -2 \\ -2 &= 0 \cdot 1 + c \\ -2 &= 0 + c - 2 = c \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangenten durch den Punkt $C(1|-2)$ lautet damit $t : y = 0x - 2 = -2$.

b) Es soll graphisch die Gleichung der Tangenten in den markierten Punkten A, B und C bestimmt werden.

Eine Tangente ist eine Gerade. Dieser liegt die Gleichung $t: y = mx + c$ zugrunde. Sobald man einen Punkt $P(x|f(x))$ dieser Geraden sowie ihre Steigung kennt, lässt sich damit die Gleichung bestimmen. Ein Punkt der Tangente lässt sich am Schaubild ablesen, die dazugehörende Steigung wird durch das Steigungsdreieck ermittelt.

- Bestimmen der Gleichung der Tangente im Punkt $A(2|0.5)$:
  - Steigung bestimmen durch Steigungsdreieck mit dem Punkt $A(2|0.5)$ und einem weiteren, frei wählbaren Punkt der Tangente, z.B. $R(-2|1.5)$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_A - Y_R}{X_A - X_R} = \frac{0.5 - 1.5}{2 - (-2)}$$
$$m = \frac{-1}{4}$$
$$m = -\frac{1}{4}$$

  - Tangentengleichung bestimmen mit dem Punkt $A(2|0.5)$ und der Steigung $m = -\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \qquad &&|m = -\frac{1}{4} \quad x = 2 \quad y = 0.5 \\ 0.5 &= -\frac{1}{4} \cdot 2 + c \\ 0.5 &= -\frac{2}{4} + c \\ 0.5 &= -\frac{1}{2} + c \qquad &&|+\frac{1}{2} \\ 0.5 + \frac{1}{2} &= c \\ 1 &= c \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangenten durch den Punkt $A(2|0.5)$ lautet damit $t: y = -\frac{1}{4}x + 1$.

- Bestimmen der Gleichung der Tangente im Punkt $B(1|1)$:
  - Steigung bestimmen durch Steigungsdreieck mit dem Punkt $B(1|1)$ und einem weiteren, frei wählbaren Punkt der Tangente, z.B. $Q(0|2)$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_B - Y_Q}{X_B - X_Q} = \frac{1 - 2}{1 - 0}$$
$$m = \frac{-1}{1}$$
$$m = -1$$

- Tangentengleichung bestimmen mit dem Punkt $B(1|1)$ und der Steigung $m = -1$:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \qquad |m = -1 \quad x = 1 \quad y = 1 \\ 1 &= -1 \cdot 1 + c \\ 1 &= -1 + c \qquad | + 1 \\ 1 + 1 &= c \\ 2 &= c \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangenten durch den Punkt $B(1|1)$ lautet damit $t : y = -1x + 2 = -x + 2$.

- Bestimmen der Gleichung der Tangente im Punkt $C(0.5|2)$:
  - Steigung bestimmen durch Steigungsdreieck mit dem Punkt $C(0.5|2)$ und einem weiteren, frei wählbaren Punkt der Tangente, z.B. $P(1|0)$:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_P - Y_C}{X_P - X_C} = \frac{0 - 2}{1 - 0.5} \\ m &= \frac{-2}{0.5} \\ m &= -4 \end{aligned}$$

  - Tangentengleichung bestimmen mit dem Punkt $C(0.5|2)$ und der Steigung $m = -4$:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \qquad |m = -4 \quad x = 0.5 \quad y = 2 \\ 2 &= -4 \cdot 0.5 + c \\ 2 &= -2 + c \qquad | + 2 \\ 4 &= c \\ c &= 4 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangenten durch den Punkt $C(0.5|2)$ lautet damit $t : y = -4x + 4$.

c) Es soll graphisch die Gleichung der Tangenten in den markierten Punkten A, B und C bestimmt werden.

Eine Tangente ist eine Gerade. Dieser liegt die Gleichung $t: y = mx + c$ zugrunde. Sobald man einen Punkt $P(x|f(x))$ dieser Geraden sowie ihre Steigung kennt, lässt sich damit die Gleichung bestimmen. Ein Punkt der Tangente lässt sich am Schaubild ablesen, die dazugehörende Steigung wird durch das Steigungsdreieck ermittelt.

- Bestimmen der Gleichung der Tangente im Punkt $A(-1|-3)$:
  - Steigung bestimmen durch Steigungsdreieck mit dem Punkt $A(-1|-3)$ und einem weiteren, frei wählbaren Punkt der Tangente, z.B. $Q(-2.5|0)$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_A - Y_Q}{X_A - X_Q} = \frac{-3-0}{-1-(-2.5)}$$
$$m = \frac{-3}{-1+2.5}$$
$$m = \frac{-3}{1.5}$$
$$m = -2$$

  - Tangentengleichung bestimmen mit dem Punkt $A(-1|-3)$ und der Steigung $m = -2$:

$$\begin{aligned} y &= mx + c && |m = -2 \quad x = -1 \quad y = -3 \\ -3 &= -2 \cdot (-1) + c \\ -3 &= 2 + c && |-2 \\ -5 &= c \end{aligned}$$

  Die Gleichung der Tangenten durch den Punkt $A(-1|-3)$ lautet damit $t: y = -2x - 5$.

- Bestimmen der Gleichung der Tangente im Punkt $B(-2|2)$:
  - Steigung bestimmen durch Steigungsdreieck mit dem Punkt $B(-2|2)$ und einem weiteren, frei wählbaren Punkt der Tangente, z.B. $R(-1.5|-2.5)$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_R - Y_B}{X_R - X_B} = \frac{-2.5-2}{-1.5-(-2)}$$
$$m = \frac{-4.5}{-1.5+2}$$
$$m = \frac{-4.5}{0.5}$$
$$m = -9$$

  - Tangentengleichung bestimmen mit dem Punkt $B(-2|2)$ und der Steigung $m = -9$:

$$\begin{aligned} y &= mx + c && |m = -9 \quad x = -2 \quad y = 2 \\ 2 &= -9 \cdot (-2) + c \\ 2 &= 18 + c && |-18 \\ -16 &= c \\ c &= -16 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangenten durch den Punkt $B(-2|2)$ lautet damit $t: y = -9x - 16$.

- Bestimmen der Gleichung der Tangente im Punkt $C(2|2)$:
  - Steigung bestimmen durch Steigungsdreieck mit dem Punkt $C(2|2)$ und einem weiteren, frei wählbaren Punkt der Tangente, z.B. $P(0|0)$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_C - Y_P}{X_C - X_P} = \frac{2-0}{2-0}$$
$$m = \frac{2}{2}$$
$$m = 1$$

  - Tangentengleichung bestimmen mit dem Punkt $C(2|2)$ und der Steigung $m = 1$:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \quad && |m = 1 \quad x = 2 \quad y = 2 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + c && \\ 2 &= 2 + c && |-2 \\ 0 &= c && \\ c &= 0 && \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangenten durch den Punkt $C(2|2)$ lautet damit $t: y = 1x + 0 = x$.