# Kapitel 1: Funktionen und ihre Graphen

Im Kapitel FUNKTIONEN UND IHRE GRAPHEN lernst du, verschiedene Eigenschaften einer Funktion zu bestimmen. Mit den ausführlichen Lösungswegen von Mathe-Scout siehst du, wie sich Nullstellen berechnen lassen, das Verhalten gegen Unendlich bestimmt wird, wie man vom Term einer Funktion auf den dazugehörenden Graphen schließt und vieles mehr.
Der Markenname Lambacher Schweizer ist rechtlich geschützt und wird ausschließlich im Zusammenhang mit den Lösungswegen verwendet.

| **Seite** 8 | **Aufgabe** 3 | **Exercise-ID** Ex.8.3.000 |
|---|---|---|

a) Für die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$ soll die gegebene Wertetabelle ergänzt werden.

Um die Tabelle zu ergänzen, werden nach und nach die angegebenen $x$-Werte in die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$ eingesetzt und die Ergebnisse in die Tabelle eingetragen.

- Einsetzen der $x$-Werte in $f(x) = \frac{1}{x}$

$$
\begin{aligned}
f(-3) &= \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \approx -0.33 \\
f(-2) &= \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = -0.5 \\
f(-1) &= \frac{1}{-1} = -1 \\
f(-\frac{1}{2}) &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1 \cdot -\frac{2}{1} = 1 \cdot -2 = -2 \\
f(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 1 \cdot 2 = 2 \\
f(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\
f(2) &= \frac{1}{2} = 0.5 \\
f(3) &= \frac{1}{3} \approx 0.33
\end{aligned}
$$

- Einsetzen der $x$-Werte in $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$g(-3) = \frac{1}{(-3)^2} \approx \frac{1}{9} = 0.11$$
$$g(-2) = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$
$$g(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$
$$g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 \cdot \frac{4}{1} = 1 \cdot 4 = 4$$
$$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 \cdot \frac{4}{1} = 1 \cdot 4 = 4$$
$$g(1) = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$$
$$g(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$
$$g(3) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \approx 0.11$$

- Damit sieht die Wertetabelle für $f(x)$ wie folgt aus:

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-2$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |

- Damit sieht die Wertetabelle für $g(x)$ wie folgt aus:

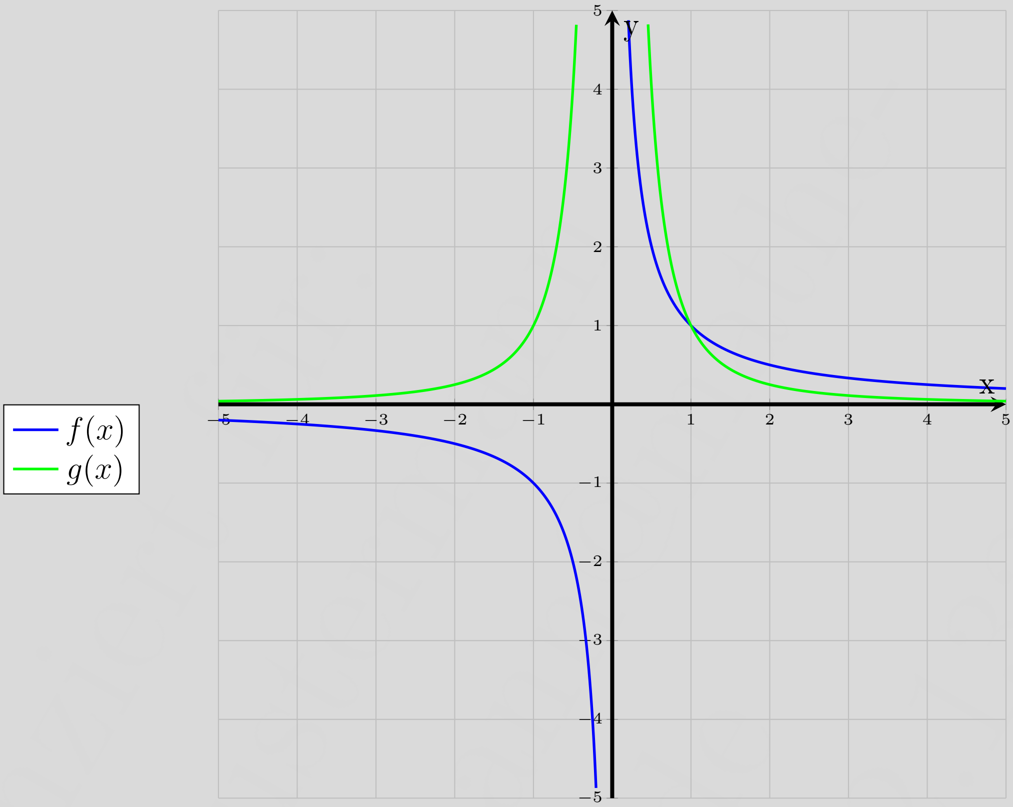
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ | $4$ | $4$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ |

b) Es soll ein Koordinatensystem erstellt und der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ sowie der Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2}$ eingezeichnet werden.

Mit den in Teilaufgabe a) berechneten Werten lassen sich die beiden Graphen zeichnen. Dazu werden jeweils die errechneten Punkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet und miteinander verbunden.

Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ lauten die ermittelten Punkte $P_1(-3|-\frac{1}{3})$, $P_2(-2|-\frac{1}{2})$, $P_3(-1|-1)$, $P_4(-\frac{1}{2}|-2)$, $P_5(\frac{1}{2}|2)$, $P_6(1|1)$, $P_7(2|\frac{1}{2})$ und $P_8(3|\frac{1}{3})$.

Für die Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2}$ lauten die ermittelten Punkte $Q_1(-3|\frac{1}{9})$, $Q_2(-2|\frac{1}{4})$, $Q_3(-1|1)$, $Q_4(-\frac{1}{2}|4)$, $Q_5(\frac{1}{2}|4)$, $Q_6(1|1)$, $Q_7(2|\frac{1}{4})$ und $Q_8(3|\frac{1}{9})$.




Es fällt leichter, die Punkte ins Koordinatensystem einzuzeichnen, wenn man sich die Bruchterme in Dezimalform notiert, siehe Teilaufgabe a)

| Seite | 8 | Aufgabe | 6 | Exercise-ID | Ex.8.6.000 |
|---|---|---|---|---|---|

a) Für die Funktion $f(x) = 0.1x^3$ sollen die Funktionswerte $f(-2)$ und $f(2)$ berechnet werden.

- Um $f(-2)$ zu berechnen, wird $x = -2$ in die Funktion $f(x) = 0.1x^3$ eingesetzt und ausgerechnet:

$$f(-2) = 0.1 \cdot (-2)^3$$
$$f(-2) = 0.1 \cdot -8$$
$$f(-2) = -0.8$$

- Um $f(2)$ zu berechnen, wird $x = 2$ in die Funktion $f(x) = 0.1x^3$ eingesetzt und ausgerechnet:

$$f(2) = 0.1 \cdot (2)^3$$
$$f(2) = 0.1 \cdot 8$$
$$f(2) = 0.8$$

b) Es soll ermittelt werden, für welchen $x$-Wert $f(x) = 100$ gilt.

Um zu berechnen, für welchen $x$-Wert $f(x) = 100$ gilt, wird die Funktion $f(x)$ gleich 100 gesetzt und nach $x$ aufgelöst:

$$0.1x^3 = 100 \quad | \div 0.1$$
$$x^3 = 1000 \quad | \sqrt[3]{\ }$$
$$x = 10$$

Für $x = 10$ gilt $f(x) = 100$.

c) Es soll geprüft werden, ob die folgenden Aussagen (1) und (2) wahr oder falsch sind.

1. Die erste Aussage lautet, dass es kein $x$ mit $f(x) = 5$ gibt. Um das zu überprüfen, wird die Funktion gleich 5 gesetzt und nach $x$ aufgelöst

$$\begin{aligned} 0.1x^3 &= 5 \qquad &&| \div 0.1 \\ x^3 &= 50 &&| \sqrt[3]{\phantom{x}} \\ x &= \sqrt[3]{50} \\ x &\approx 3.68 \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage (1) falsch. Denn für $x = \sqrt[3]{50}$ gilt $f(x) = 50$.

2. Die zweite Aussage lautet, dass $f(-7) + f(7) = 0$ ist. Dazu wird der linke Teil der Gleichung berechnet. Ergibt dieser 0 so ist die Aussage wahr. Für jedes andere Ergebnis gilt, dass die Aussage falsch ist.

$$\begin{aligned} f(-7) + f(7) &=? \\ 0.1 \cdot (-7)^3 + 0.1 \cdot (7)^3 &=? \\ 0.1 \cdot (-343) + 0.1 \cdot 343 &=? \\ -34.3 + 34.3 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage (2) wahr.

| **Seite** | 9 | **Aufgabe** | 17 | **Exercise-ID** | Ex.9.17.000 |
|---|---|---|---|---|---|

a) Es sollen $f(6)$, $f(7)$ und $f(8)$ für die Funktion $f(n)$ bestimmt werden. $f(n)$ ordnet n die kleinste Primzahl zu, die größer als n ist.

- $f(6)$ : Es wird die nach 6 folgende Primzahl gesucht. Da es sich dabei um 7 handelt, gilt: $f(6) = 7$
- $f(7)$ : Es wird die nach 7 folgende Primzahl gesucht. Da es sich dabei um 11 handelt, gilt: $f(7) = 11$
- $f(20)$ : Es wird die nach 20 folgende Primzahl gesucht. Da es sich dabei um 23 handelt, gilt: $f(20) = 23$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Darstellung der Primzahlen bis 100 (rot markiert)

b) Es soll geprüft werden, ob die Aussage wahr ist.

Die Aussage wird geprüft, indem nach einem Gegenbeispiel gesucht wird, das die Aussage widerlegt.

Die Aussage ist falsch, da z.B. für $n = 7$ gilt: $f(n) = f(7) = 11$. Gleichzeitig gilt für $f(n+3) = f(7+3) = f(10) = 11$. Damit ist $f(n) = f(n+3)$ und die Aussage somit widerlegt.

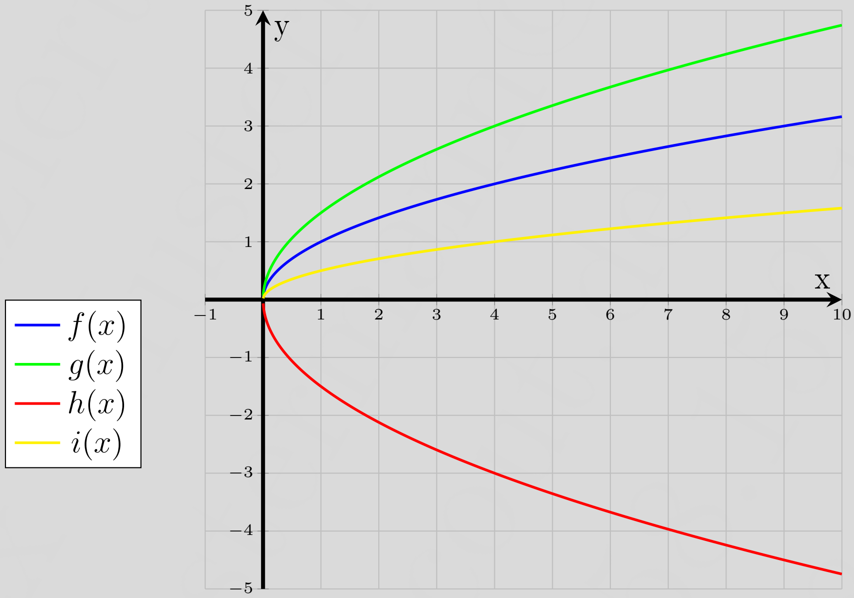
| Seite 12 | Aufgabe 5 | Exercise-ID Ex.12.5.000 |
|---|---|---|

a) Es sollen die Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$, $h(x) = \sqrt{x-3}$ und $i(x) = \sqrt{x+4}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem gezeichnet werden.

- Den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erhält man durch das Einsetzen vereinzelter Werte wie zum Beispiel $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(4) = 2$ und $f(9) = 3$.
- Den Graphen der Funktion $g(x) = \sqrt{x} + 1$ erhält man durch das Verschieben der Funktion $f(x)$ um $+1$ in $y$-Richtung.
- Den Graphen der Funktion $h(x) = \sqrt{x-3}$ erhält man durch das Verschieben der Funktion $f(x)$ um $+3$ in $x$-Richtung.
- Den Graphen der Funktion $i(x) = \sqrt{x+4}$ erhält man durch das Verschieben der Funktion $f(x)$ um $-4$ in $x$-Richtung.

b) Es sollen die Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1.5\sqrt{x}$, $h(x) = -1.5\sqrt{x}$ und $i(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem gezeichnet werden.

- Den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erhält man durch das Einsetzen vereinzelter Werte wie zum Beispiel $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(4) = 2$ und $f(9) = 3$.
- Den Graphen der Funktion $g(x) = 1.5\sqrt{x}$ erhält man durch das Strecken der Funktion $f(x)$ mit dem Faktor 1.5. Man erhält die Funktionswerte $g(0) = 0,\ f(1) = 1.5,\ f(4) = 3$ und $f(9) = 4.5$.
- Den Graphen der Funktion $h(x) = -1.5\sqrt{x}$ erhält man durch das Spiegeln der Funktion $g(x)$ an der $x$-Achse, da der negative Streckfaktor eine Spiegelung an der $x$-Achse bewirkt.
- Den Graphen der Funktion $i(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ erhält man durch das Strecken der Funktion $f(x)$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$. Man erhält die Funktionswerte $i(0) = 0$, $i(1) = 0.5$, $i(4) = 1$ und $i(9) = 1.5$.



| Seite | 24 | Aufgabe | 1 | Exercise-ID | Ex.24.1.000 |
|---|---|---|---|---|---|

a) Es sollen die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 6$ berechnet werden.

$f(x) = \underbrace{1}_{a} \cdot x^2 + \underbrace{-5}_{b} \cdot x + \underbrace{6}_{c} = 0 \qquad a = 1 \qquad b = -5 \qquad c = 6$

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\
x_{1,2} &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\
x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{5 \pm 1}{2} \\
x_1 &= \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\
x_2 &= \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2
\end{aligned}
$$

Es existieren somit die Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3 \\
x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

b) Es sollen die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$ berechnet werden.

$f(x) = \underbrace{4}_{a} \cdot x^2 + \underbrace{-4}_{b} \cdot x + \underbrace{-3}_{c} = 0 \qquad a = 4 \qquad b = -4 \qquad c = -3$

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\
x_{1,2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} \\
x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{8} \\
x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-12)}}{8} \\
x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - (-48)}}{8} \\
x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} \\
x_{1,2} &= \frac{4 \pm 8}{8} \\
x_1 &= \frac{4 + 8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5 \\
x_2 &= \frac{4 - 8}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} = -0.5
\end{aligned}
$$

Es existieren somit die Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1.5 \\
x_2 &= -0.5
\end{aligned}
$$

Max Mustermann IP: 5.158.152.132 05.09.2018

c) Es sollen die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ berechnet werden.

$f(x) = \underbrace{1}_{a} \cdot x^2 + \underbrace{-3}_{b} \cdot x + \underbrace{-4}_{c} = 0 \qquad a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = -4$

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\
x_{1,2} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \\
x_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-4)}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - (-16)}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{3 \pm 5}{2} \\
x_1 &= \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\
x_2 &= \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1
\end{aligned}
$$

Es existieren somit die Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4 \\
x_2 &= -1
\end{aligned}
$$

d) Es sollen die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = 4x^2 - \frac{25}{4}$ berechnet werden.

$f(x) = \underbrace{4}_{a} \cdot x^2 + \underbrace{0}_{b} \cdot x + \underbrace{-\frac{25}{4}}_{c} = 0 \qquad a = 4 \qquad b = 0 \qquad c = -\frac{25}{4} = -6.25$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-\frac{25}{4})}}{2 \cdot 4}$$
$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 4 \cdot (-\frac{25}{4})}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot (-25)}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - (-100)}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{100}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{0 \pm 10}{8}$$
$$x_1 = \frac{0 + 10}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1.25$$
$$x_2 = \frac{0 - 10}{8} = \frac{-10}{8} = -\frac{5}{4} = -1.25$$

Es existieren somit die Nullstellen:

$$x_1 = 1.25$$
$$x_2 = -1.25$$

e) Es sollen die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{100}$ berechnet werden.

$f(x) = \underbrace{1}_{a} \cdot x^2 + \underbrace{\frac{1}{5}}_{b} \cdot x + \underbrace{\frac{1}{100}}_{c} = 0 \qquad a = 1 \qquad b = \frac{1}{5} = 0.2 \qquad c = \frac{1}{100} = 0.01$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{5}^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{100}}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{100}}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} - 4 \cdot \frac{1}{100}}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} - \frac{1}{25}}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{5} \pm \sqrt{0}}{2}$$

Da der Wert unter der Wurzel (Diskriminante) gleich Null ist, existiert nur eine Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x_1 = \frac{-0.2}{2} = -\frac{1}{10} = -0.1$$

Es existiert somit die Nullstelle:

$$x_1 = -0.1$$

f) Es sollen die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + \frac{1}{9}$ berechnet werden.

$$f(x) = \underbrace{1}_{a} \cdot x^2 + \underbrace{0}_{b} \cdot x + \underbrace{\frac{1}{9}}_{c} = 0 \qquad a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = \tfrac{1}{9} = 0.1111$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9}}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9}}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot \frac{1}{9}}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - \frac{4}{9}}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-0.4444}}{2}$$

Da der Wert unter der Wurzel (Diskriminante) kleiner Null ist, existiert keine Lösung der quadratischen Gleichung.
Es existiert somit keine Nullstelle.

| **Seite** | 25 | **Aufgabe** | 8 | **Exercise-ID** | Ex.25.8.000 |
|---|---|---|---|---|---|

a) Es sollen die Schnittpunkte der Graphen $f(x)$ und $h(x)$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 4$ berechnet werden.

Zum Berechnen der Schnittpunkte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ werden die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gleich gesetzt:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 &= -x^2 + 4 \end{aligned}$$

Es werden alle Summanden auf die linke Seite gebracht, sodass auf der rechten Seite Null steht und anschließend nach den Exponenten sortiert:

$$\begin{aligned} x^2 &= -x^2 + 4 \quad &&| - (-x^2 + 4) \\ x^2 - (-x^2 + 4) &= 0 \\ x^2 + x^2 - 4 &= 0 \\ 2x^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die Nullstellen der Gleichung $2x^2 - 4 = 0$ zu berechnen. Dazu kann die Gleichung $2x^2 - 4 = 0$ nach $x$ aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4 &= 0 \quad &&| + 4 \\ 2x^2 &= 4 &&| \div 2 \\ x^2 &= 2 &&| \sqrt{\phantom{x}} \\ x &= \pm\sqrt{2} \\ x_1 &= \sqrt{2} \approx 1.414 \\ x_2 &= -\sqrt{2} \approx -1.414 \end{aligned}$$

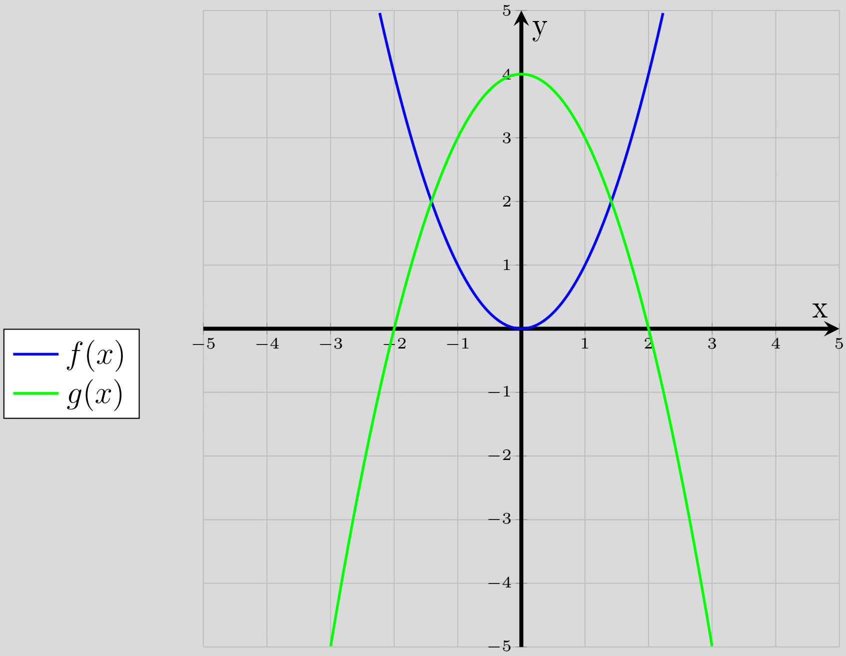
Die $x$-Werte der Schnittpunkte lauten somit:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2} \\ x_2 &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Um die $y$-Werte und somit die vollständigen Koordinaten der Schnittpunkte angeben zu können, müssen die $x$-Werte $x_1$ und $x_2$ in eine der Funktionen $f(x)$ oder $g(x)$ (egal welche) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) = (\sqrt{2})^2 = 2 \\ y_2 &= f(x_2) = (-\sqrt{2})^2 = 2 \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte der Graphen $f(x)$ und $g(x)$ lauten somit $S_1(\sqrt{2}|2)$ und $S_2(-\sqrt{2}|2)$. Zur Veranschaulichung werden die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gezeichnet, um die berechneten Schnittpunkte überprüfen zu können.




Bei der Wahl der Funktion, in die die $x$-Werte eingesetzt werden, ist es sinnvoll, wenn man die einfachere von beiden verwendet (hier $f(x)$). So spart man sich Rechenarbeit, dies kann vor allen in einer Klassenarbeit von Bedeutung sein!

Lizenziert für Max Mustermann, Max.Mustermann@mathe-scout.de, IP: 5.158.152.132, 05.09.2018 01:09:20

b) Es sollen die Schnittpunkte der Graphen $f(x)$ und $g(x)$ mit $f(x) = -x^3$ und $g(x) = 2x^2 - 8x$ berechnet werden.

Zum Berechnen der Schnittpunkte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ werden die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gleich gesetzt:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -x^3 &= 2x^2 - 8x \end{aligned}$$

Es werden alle Summanden auf die linke Seite gebracht, sodass auf der rechten Seite Null steht und anschließend nach den Exponenten sortiert:

$$\begin{aligned} -x^3 &= -2x^2 - 8x \quad | - (2x^2 - 8x) \\ -x^3 - (2x^2 - 8x) &= 0 \\ -x^3 - 2x^2 + 8x &= 0 \end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht nun darin die Nullstellen der Gleichung $-x^3 - 2x^2 + 8x = 0$ zu berechnen. Jeder Summand der Gleichung $-x^3 - 2x^2 + 8x = 0$ besitzt die Variable $x$, somit ist das Ausklammern von $x$ möglich:

$$-x^3 - 2x^2 + 8x \Leftrightarrow x(-x^2 - 2x + 8)$$

Es ist zu erkennen, dass das Ausklammern der Variable $x$ zu einem Produkt führt, dessen Faktor $x$ eine Nullstelle bei $x_1 = 0$ erzeugt (Satz vom Nullprodukt).
Somit muss nur noch der weitere Faktor $-x^2 - 2x + 8$ auf Nullstellen untersucht werden.
$f(x) = \underbrace{-1}_{a} \cdot x^2 + \underbrace{-2}_{b} \cdot x + \underbrace{8}_{c} = 0 \qquad a = -1 \qquad b = -2 \qquad c = 8$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ x_{1,2} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8}}{2 \cdot (-1)} \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 8}}{(-2)} \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-8)}}{-2} \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - (-32)}}{-2} \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{36}}{-2} \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm 6}{-2} \\ x_1 &= \frac{2 + 6}{-2} = \frac{8}{-2} = -4 \\ x_2 &= \frac{2 - 6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{aligned}$$

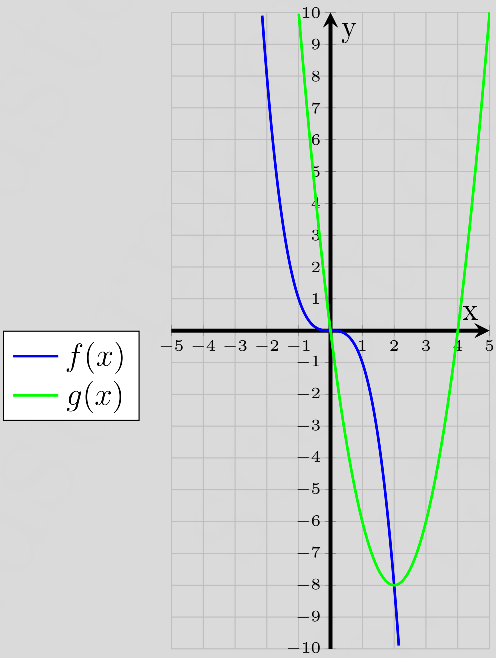
Die $x$-Werte der Schnittpunkte lauten somit:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -4$$
$$x_3 = 2$$

Um die $y$-Werte und somit die vollständigen Koordinaten der Schnittpunkte angeben zu können, müssen die $x$-Werte $x_1$, $x_2$ und $x_3$ in einer der Funktionen $f(x)$ oder $g(x)$ (egal welche) eingesetzt werden:

$$y_1 = f(x_1) = -(x_1)^3 = -(0)^3 = 0$$
$$y_2 = f(x_2) = -(x_2)^3 = -(-4)^3 = 64$$
$$y_3 = f(x_3) = -(x_3)^3 = -(2)^3 = -8$$

Die Schnittpunkte der Graphen $f(x)$ und $g(x)$ lauten somit $S_1(0|0)$, $S_2(-4|64)$ und $S_3(2|-8)$. Zur Veranschaulichung werden die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gezeichnet, um die berechneten Schnittpunkte überprüfen zu können.




Bei der Wahl der Funktion, in die die $x$-Werte eingesetzt werden, ist es sinnvoll, wenn man die einfachere von beiden verwendet (hier $f(x)$). So spart man sich Rechenarbeit, dies kann vor allen in einer Klassenarbeit von Bedeutung sein!

c) Es sollen die Schnittpunkte der Graphen $f(x)$ und $g(x)$ mit $f(x) = -3$ und $g(x) = x^4 - 4x^2$ berechnet werden.

Zum Berechnen der Schnittpunkte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ werden die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gleich gesetzt:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -3 &= x^4 - 4x^2 \end{aligned}$$

Es werden alle Summanden auf die linke Seite gebracht, sodass auf der rechten Seite Null steht und anschließend nach den Exponenten sortiert:

$$\begin{aligned} -3 &= x^4 - 4x^2 \quad | - (x^4 - 4x^2) \\ -3 - (x^4 - 4x^2) &= 0 \\ -x^4 + 4x^2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die Nullstellen der Gleichung $-x^4 + 4x^2 - 3 = 0$ zu berechnen.
Es sollen die Nullstellen der biquadratischen Gleichung $f(x) = 0$ berechnet werden.
Da es sich um eine biquadratische Gleichung handelt, ist zunächst eine Subsitution notwendig, sodass im Anschluss die gewöhnliche Mitternachtsformel zur Nullstellenberechnung verwendet werden kann.
$f(x) = \underbrace{-1}_{a} \cdot x^4 + \underbrace{4}_{b} \cdot x^2 + \underbrace{-3}_{c} = 0 \qquad a = -1 \qquad b = 4 \qquad c = -3$
Durch Substitution von $x^2 = z$ und $x^4 = z^2$ ergibt sich:
$f(z) = \underbrace{-1}_{a} \cdot z^2 + \underbrace{4}_{b} \cdot z + \underbrace{-3}_{c} = 0 \qquad a = -1 \qquad b = 4 \qquad c = -3$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ z_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} \\ z_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{(-2)} \\ z_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{-2} \\ z_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-2} \\ z_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} \\ z_{1,2} &= \frac{-4 \pm 2}{-2} \\ z_1 &= \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \\ z_2 &= \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \end{aligned}$$

Durch Rücksubstitution $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$ erhält man:

$$x_1 = \sqrt{z_1} = \sqrt{1} = 1$$
$$x_2 = -\sqrt{z_1} = -\sqrt{1} = -1$$
$$x_3 = \sqrt{z_2} = \sqrt{3} = 1.7321$$
$$x_4 = -\sqrt{z_2} = -\sqrt{3} = -1.7321$$

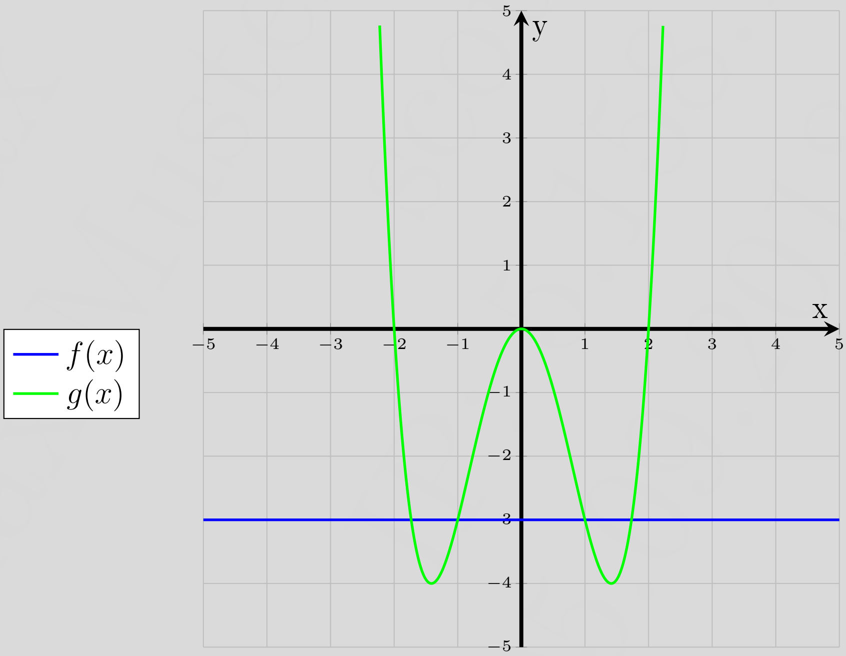
Die $x$-Werte der Schnittpunkte lauten somit:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = \sqrt{3}$$
$$x_4 = -\sqrt{3}$$

Um die $y$-Werte und somit die vollständigen Koordinaten der Schnittpunkte angeben zu können, müssen die $x$-Werte $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $x_4$ in eine der Funktionen $f(x)$ oder $g(x)$ (egal welche) eingesetzt werden:

$$y_1 = f(x_1) = -3$$
$$y_2 = f(x_2) = -3$$
$$y_3 = f(x_3) = -3$$
$$y_4 = f(x_4) = -3$$

Die Schnittpunkte der Graphen $f(x)$ und $g(x)$ lauten somit $S_1(1|-3)$, $S_2(-1|-3)$, $S_3(\sqrt{3}|-3)$ und $S_4(-\sqrt{3}|-3)$.
Zur Veranschaulichung werden die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gezeichnet, um die berechneten Schnittpunkte überprüfen zu können.




Bei der Wahl der Funktion, in die die $x$-Werte eingesetzt werden, ist es sinnvoll, wenn man die einfachere von beiden verwendet (hier $f(x)$). So spart man sich Rechenarbeit, dies kann vor allen in einer Klassenarbeit von Bedeutung sein!